11
4
191
BIBLIOTECA NAZIONALE
CENTRALE • FIRENZE •

11. 4. 19.

ÉLÉMENTS

DE

MATHÉMATIQUES.

ÉLÉMENTS

DE

MATHÉMATIQUES

A L'USAGE

DES ÉCOLES NATIONALES;

Ouvrage servant d'introduction à l'étude des Sciences physico-mathématiques;

PAR ROGER MARTIN,

Membre du corps législatif et professeur de physique expérimentale à Toulouse.

NOUVELLE ÉDITION REVUE ET AUGMENTÉE.

A PARIS,

Chez FIRMIN DIDOT, libraire, rue de Thionville pour les Mathématiques, la Marine, l'Architecture et les Editions stéréotypes.

AN X.

AVERTISSEMENT.

Le but qu'on s'est proposé, en rédigeant ces Eléments, a été de réunir en un assez petit volume, et surtout de démontrer avec exactitude toutes les connaissances de mathématiques pures qui sont nécessaires pour l'intelligence des sciences physico-mathématiques, telles qu'on peut les enseigner dans les écoles publiques. On s'est même permis quelquefois d'aller un peu plus loin que cet objet ne demande, afin que ceux qui n'auront d'autres vues que d'apprendre les éléments, les trouvent ici avec assez d'étendue. On a fait en sorte de présenter dans le discours préliminaire l'analyse de quelques idées abstraites qui sont le fondement de la science que nous traitons, et de justifier dans d'autres endroits les changements qu'on s'est permis de faire sur quelques points assez importants. De telles discussions qui font

voir combien les mathématiques peuvent emprunter d'utiles secours de la philosophie, ne sauraient être déplacées dans un livre de l'espèce de celui-ci. Cependant, comme il est plus facile d'entendre les éléments d'une science que de pénétrer dans la métaphysique, souvent très-profonde, qui a présidé à ses principes, il nous paraît que, dans une première lecture, on peut omettre, sans inconvénient, le discours préliminaire en tout ou en partie, pour ne s'occuper que des éléments. On y reviendra ensuite avec plus de fruit, et surtout avec plus d'intérêt, parce qu'on en aura senti la nécessité dans plusieurs endroits de l'ouvrage.

Au reste, les développements plus ou moins étendus qu'on se proposera de donner, dans les écoles publiques, aux sciences physico-mathématiques, décident jusqu'à quel point les élèves devront être instruits dans les mathématiques pures; et font qu'un livre élémentaire de cette science,

qui leur est spécialement consacré, ne peut contenir exactement les connaissances dont chacun a besoin pour atteindre le but qu'il se propose. On a fait entrer dans celui-ci tout ce qu'il peut être utile de savoir dans les cours où l'on donnera le plus d'étendue à ce genre d'enseignement; et dans ceux où l'on voudra le restreindre, il sera toujours loisible d'omettre certains chapitres en tout ou en partie, ce qui se peut faire sans que les autres deviennent plus difficiles à entendre. A la vérité, il nous paraît qu'on ne peut rien retrancher de l'arithmétique ni de la géométrie; mais dans l'algèbre on peut passer les chapitres V et VII de la seconde section; VII, IX et X de la troisième, et IV, VI et VII de la quatrième; pour tout le reste, savoir, l'abrégé sur les sections coniques et les principes de calcul différentiel et intégral, les vues qu'on aura en enseignant ces éléments doivent uniquement décider s'il faut s'en occuper ou non. Quel que soit le but qu'on se propose, on ne peut omettre le

chapitre servant d'introduction au calcul différentiel, parce que là seulement se trouvent des notions exactes sur l'infini, et que ces notions sont d'un fréquent usage dans toutes les parties des sciences mathématiques.

DISCOURS

PRÉLIMINAIRE.

I.

On ne doit pas oublier, en lisant cet ouvrage, qu'un livre élémentaire sur une science quelconque diffère essentiellement d'un traité complet sur la même matière; que chacun a son but particulier, sa marche et ses résultats différents. L'un, pour offrir un corps complet de doctrine, doit se livrer à tous les détails, épuiser les conséquences, et ne laisser ignorer aucune vérité connue sur l'art ou la science qu'il expose. L'autre, au contraire, uniquement destiné à poser les fondements plutôt qu'à élever l'édifice, se renferme dans les principes et en fait un sévère choix; il se livre peu aux applications, et ne développe avec étendue que les points importants, les vérités premières sur lesquelles la science entière repose. Dans un cas, l'auteur ne peut rien omettre de ce qui a été dit sur le même sujet; dans l'autre, l'abondance seule l'embarrasse; il n'est occupé qu'à choisir et à ordonner; le premier craint peu la prolixité; c'est pour l'autre le reproche le plus grave, et communément le plus juste, parce qu'il ne sait pas résister à la facilité de faire un gros volume, qui, pour le but qu'il se propose, devient par cela seul un mauvais livre. Idée des élémens de mathématiques, leur utilité.

Les traités complets sur une partie quelconque des mathématiques, ont toujours eu, et auront en-

core, un petit nombre de lecteurs; mais depuis que l'étude de ces sciences est entrée dans le système de l'éducation nationale, et que chacun est tenu d'en suivre l'enseignement dans les écoles, les livres élémentaires sont devenus un objet de besoin général pour l'instruction publique. Un tel changement dans les premières études doit faire espérer les plus heureux résultats pour le perfectionnement des arts et les progrès des lumières. On se convaincra de plus en plus que les sciences exactes, outre les connaissances utiles qu'elles procurent, sont un grand moyen de développement pour toutes les facultés de l'esprit humain; qu'on ne saurait trop en occuper les jeunes gens, à quelque état qu'on les destine; qu'ils y trouveront cette logique pratique qui substitue aux règles du raisonnement l'habitude de raisonner juste, plus précieuse que toutes les règles; et, sous ce rapport, les bons livres élémentaires de cette science sont une sorte de bienfait public, et deviendront de jour en jour d'une utilité plus générale et plus sentie.

II.

Rareté des bons livres élémentaires : qualités qu'ils doivent avoir.

Quoiqu'on n'ait jamais douté de tous ces avantages et d'une infinité d'autres qu'il est inutile de rappeler, comment se peut-il qu'il nous manque encore de bons éléments des sciences mathématiques, et qu'au milieu d'une multitude d'ouvrages de ce genre, un géomètre célèbre (*) n'ait vu

(*) D'Alembert, Mélanges de littérature, tom. 5, p. 201.

qu'une *stérile abondance*, qui embarrasse sans enrichir? Mais cette apparente contradiction n'étonnera personne, si l'on fait attention que, suivant le plan différent qu'un auteur se propose, un livre élémentaire de mathématiques (et l'on en peut dire autant de toute sorte d'éléments) est le plus facile ou le plus difficile des ouvrages qu'on peut entreprendre. Il est le plus facile, si l'on n'a pour but que de faire un livre, ou plutôt une compilation désordonnée à laquelle la mémoire a plus de part que l'intelligence et la réflexion : il est le plus difficile, si l'auteur ne veut écrire que d'après ses idées, s'il ne veut employer celles d'autrui qu'après se les être appropriées par la méditation et l'examen, s'il veut allier la clarté avec la précision, enchaîner les vérités élémentaires, les disposer dans l'ordre le plus convenable, être exact dans les définitions, sévère dans le raisonnement, occuper l'entendement sans fatiguer la mémoire, ne dire que ce qu'il faut, laisser deviner quelque chose, pour exercer l'esprit des commençants sans le rebuter : s'il veut encore remonter aux notions primitives, saisir le génie des inventeurs, aplanir les difficultés qu'ils ont laissées, user à propos des secours que la philosophie peut prêter au calcul et à la géométrie; c'est alors qu'on sentira combien une entreprise de ce genre renferme de difficultés, et ce qu'il faut de talents, de méditation et de persévérance pour enrichir de quelque idée neuve ou de quelque forme plus simple et plus facile un sujet traité tant de fois, et par des mains si habiles.

Une circonstance étrangère à ces difficultés a concouru à rendre les bons livres élémentaires encore plus rares parmi nous, c'est cette espèce d'oubli auquel on a condamné dans ces derniers temps la géométrie des anciens. En effet, serait-il possible qu'après une étude approfondie d'Euclide, la plupart des auteurs, qui ont écrit sur le même sujet que lui, manquassent d'exactitude dans les définitions, d'ordre dans les idées, de rigueur dans le raisonnement ; qu'ils sacrifiassent la vérité des preuves à la facilité des méthodes souvent incertaines, quelquefois fausses, ainsi qu'on le leur a si souvent et si justement reproché? De telles erreurs ne sont point compatibles avec cette rectitude d'idées, cet esprit géométrique, qu'on ne peut manquer d'acquérir en méditant cet immortel ouvrage. Que je me féliciterais de m'en être servi à propos dans les endroits où il m'a été permis d'en suivre la marche et d'en employer la doctrine pour enrichir mes éléments de géométrie! Avant de parler de l'usage assez fréquent que j'en ai fait, je dois analyser quelques idées générales, présenter ici des notions métaphysiques, qui sont le fondement de la science, et qui n'auraient pu se placer dans le corps de l'ouvrage avec tous les développements qu'elles exigent, sans amener de trop longues et trop fréquentes digressions. Je tâcherai en même temps de justifier les innovations que je me suis permises dans quelques points assez importants de ces éléments.

III.

Notion de la quantité en général.

Notre esprit ne s'élevant aux idées universelles qu'après avoir considéré les objets particuliers ou individuels, l'ordre de nos connaissances fait voir que la notion de la quantité en général suppose déja celle de plusieurs quantités particulières ou individuelles. Or, pour savoir comment se forme en nous cette dernière notion, il suffit d'observer que parmi les êtres divers qui se présentent à notre esprit, plusieurs sont tels qu'on en peut toujours imaginer dans la même espèce, et de plus grands et de plus petits qu'eux. C'est ainsi que nous nous représentons une étendue déterminée quelconque, par exemple, une ligne d'un mètre de longueur, une durée fixe, comme une heure, un mouvement, une masse, etc., de façon que quelque grands ou petits que ces êtres soient en eux-mêmes, nous en pouvons concevoir, et de plus grands et de plus petits encore, sans que rien borne notre imagination à cet égard. C'est là ce qu'on entend quand on dit de ces êtres qu'ils sont *susceptibles* d'augmentation et de diminution sans fin; et en les considérant sous ce rapport, on les appelle des *quantités*. Tant que cette notion de la quantité s'applique à des objets déterminés, comme à une étendue, à une durée, à une vîtesse, etc. elle se présente à nous avec les attributs ou qualités inhérentes à la nature de ces êtres, et alors nous l'appelons *quantité concrète*. Mais si, laissant à part tous les caractères particuliers à chaque espèce de quantité, on

ne considère dans ces êtres divers que l'aptitude qu'ils ont tous à devenir plus grands ou plus petits, alors on se forme l'idée de la *quantité abstraite* (*) ou séparée de toutes ses qualités, et considérée sous le point de vue le plus général. Par là on voit que l'idée de la quantité abstraite représente un objet simple et toujours le même; tandis que les quantités concrètes s'offrent à l'esprit comme des êtres différents, quelquefois même opposés entre eux par les qualités qui les accompagnent. Ces deux sortes de quantités sont l'objet général de la science mathématique, qui prend les noms d'Arithmétique, de Géométrie, de Mécanique, d'Astronomie, etc. suivant l'espèce de quantités dont elle s'occupe, et les points de vue différents sous lesquels elle les envisage. Les rapports de ces mêmes quantités, ou les résultats des comparaisons que notre esprit établit de l'une à l'autre, et qui peuvent varier à l'infini, sont ce qu'on appelle les *propriétés* de la quantité, et forment tout l'ensemble des vérités que les sciences mathématiques enseignent.

IV.

Quantités homogènes et hétérogènes.

L'idée que nous venons de donner des quantités concrètes en particulier doit faire conclure qu'il y en a, dans ce genre, et d'*homogènes* et d'*hétérogènes*

(*) Ce mot vient du terme latin *abstrahere*, qui veut dire *séparer, diviser;* ainsi que *concret* vient ou de *concrescere*, s'assembler, se réunir en un seul, ou de *concernere*, voir ensemble.

entre elles, ou bien que certaines peuvent être conçues, si on les compare ensemble, sous le rapport de tout et de partie, et que d'autres ne le peuvent pas. Pour se former une notion exacte de cette différence, on dira, d'après Euclide, que deux quantités sont homogènes lorsque l'une ajoutée un certain nombre de fois à elle-même, peut surpasser l'autre, et qu'elles sont hétérogènes quand cet excès de l'une sur l'autre ne peut jamais avoir lieu. Ainsi une durée et une étendue, une ligne et une surface, sont des quantités hétérogènes entre elles, parce que l'une ajoutée à elle-même ne peut jamais produire l'autre. Or, une somme de plusieurs quantités n'étant autre chose qu'une autre quantité résultant de celles-là, comme un tout résulte de ses parties; de même une différence de deux quantités supposant toujours une espèce de superposition ou de mesure de l'une par l'autre, il s'ensuit qu'on ne peut, ni réduire en une somme des quantités hétérogènes, ni concevoir entre elles une différence de grandeur quelconque.

V.

Toute quantité est limitée, et contient une multitude de parties.

Mais quelle que soit une quantité, on ne saurait se la représenter sans concevoir en même temps des limites qui la terminent. En effet, la notion de la quantité suppose une aptitude à recevoir des augmentations quelconques. Or, ces augmentations ne pouvant avoir lieu sans imaginer que là où se termine une quantité, il en commence une autre qui va

se terminer plus loin; il s'ensuit que la notion de limites fixes entre nécessairement dans l'idée de la quantité. Celle d'une multitude de parties en est aussi un attribut essentiel; car toute quantité étant, par son essence, un être composé, elle renferme nécessairement plusieurs autres êtres de même nature qu'elle, et n'est autre chose que tous ceux-là pris ensemble. Or, si A est la même chose que B, C, D, pris ensemble, A sera dit un tout et B, C, D, en seront les parties. Ainsi la notion d'une multitude de parties est encore inséparable de l'idée de la quantité.

V I.

Notion de l'unité et du nombre.

Ce serait une manifeste contradiction de dire que l'idée d'un être déterminé, quel qu'il soit, est aussi celle d'une multitude d'êtres ou semblables à lui ou différents de lui, puisqu'alors cette idée serait et ne serait pas en même temps la notion qui représente l'être particulier dont il est question. Or, pour exprimer que la notion qu'on se forme d'un être quelconque, ne saurait être celle d'une multitude d'autres, nous disons de celui-là qu'il est *un*. Ainsi chaque objet de notre pensée est *un*, et ne saurait être conçu autrement sans la plus manifeste contradiction. Lorsque notre esprit veut se représenter à la fois, et l'attribut d'être *un*, et le sujet où cet attribut réside, nous employons le terme adjectif *un*, qui, ainsi que tous les autres adjectifs, désigne à la fois, et la qualité dont on parle, et le sujet auquel on l'attribue. Mais si nous voulons raisonner sur

cette qualité, abstraction faite du sujet, nous la considérons seule comme un être indépendant et substantiel, et nous la désignons par le nom substantif d'*unité*. Que doit-on donc entendre par *unité*, en prenant ce mot dans un sens exact et rigoureux? On doit entendre, ainsi que l'a dit Euclide (*), *la notion abstraite de ce qui fait qu'un être quelconque est dit* un. Si notre esprit se représente la réunion de plusieurs unités sans en fixer ni le nombre ni la valeur de chacune, il se forme la notion abstraite de *multitude ;* et s'il donne des limites à cette multitude, et qu'en outre, la même notion lui représente chacune des unités qui la composent, il se formera l'idée du *nombre*. Qu'est-ce donc qu'un nombre? Ce n'est autre chose *qu'une multitude limitée d'unités semblables ou considérées comme semblables*. D'où l'on voit qu'on ne peut se représenter un nombre *infini*, c'est-à-dire, un nombre sans limites, parce que une telle notion renfermant deux idées contradictoires est absurde ou impossible. Il n'en est pas de même d'un nombre *indéfini* ou *indéterminé ;* car ces dénominations font assez entendre que celui-ci a réellement des limites, et qu'il n'est dit indéfini que parce qu'on ignore où elles sont, quoiqu'on sache qu'elles existent.

VII.

Conséquences qui s'ensuivent de cette définition.

De ce que nous venons de dire sur la nature des nombres, on en déduira plusieurs conséquences

(*) *Unitas est, secundum quam unumquodque eorum quæ sunt, unum dicitur.* Eucl. l. 7, déf. 1.

importantes; la première, qu'une quantité quelconque peut être conçue comme un nombre, puisque pouvant être divisée en une multitude déterminée de parties égales, rien n'empêche de prendre une de ces parties pour unité; et alors cette quantité, qui en est l'assemblage, devient un nombre. La seconde, que les nombres sont ou *abstraits* ou *concrets* (*), suivant que leur unité est elle-même ou abstraite ou concrète. La troisième, que l'unité concrète étant la seule qu'on conçoive revêtue de certaines qualités, il n'y a que les nombres concrets qui, par les attributs différents de leur unité, puissent former des nombres, ou hétérogènes, ou opposés entre eux, quoique ayant une unité de même valeur, mais non de même espèce.

VIII.

Notion de la quantité continue et de la quantité discrète.

En observant la nature de différentes quantités qui se présentent à notre esprit, on voit aisément qu'il entre dans la notion que nous nous formons de quelques-unes d'entre elles, d'avoir leurs diverses parties liées les unes aux autres sans interruption; c'est-à-dire, sans aucun intervalle où la quantité manque dans le passage d'une partie à la partie suivante: c'est ainsi que nous concevons les diverses parties qui composent une étendue quelconque, ou bien un

(*) Wolf et le Dictionnaire de l'Académie les appellent *nombres nombrants* et *nombres nombrés;* mais nous préférons les termes scolastiques d'*abstrait* et de *concret*, parce qu'ils nous paraissent avoir une étymologie plus claire.

mouvement, une durée, etc. Or, toutes les quantités qu'on peut se représenter sous ce nouveau rapport, sont appelées, avec raison, quantités *continues;* et, au contraire, on appelle *discrètes* (*) toutes celles où l'on conçoit les parties séparées, ou plutôt celles où notre esprit conçoit seulement une multitude de parties, faisant abstraction de ce qui peut les unir les unes aux autres. Ainsi les nombres sont des quantités discrètes, parce que, pour les concevoir, il suffit d'imaginer une multitude de parties, sans penser à leur continuité. Mais une ligne, une surface sont des quantités continues, puisqu'on n'y peut imaginer des parties, sans concevoir que la limite de l'une se confond avec celle de sa voisine, et qu'ainsi l'on passe sans interruption d'une partie à la partie suivante. Ces deux espèces de quantités, savoir la discrète et la continue, font ensemble l'objet général des sciences mathématiques. Mais comme pour concevoir la quantité discrète, il suffit de se représenter seulement une multitude de parties, ce qui se peut trouver dans toute sorte de quantités, il s'ensuit que la notion de la quantité discrète est plus simple et plus étendue que celle de la quantité continue; et qu'ainsi l'arithmétique qui traite de cette sorte de quantité, outre qu'elle est la plus utile de toutes nos connaissances, devient, par la nature de son objet, et d'après l'ordre de nos idées, la première dont on doit s'occuper dans l'étude des sciences mathématiques.

(*) Ce mot vient de *discernere*, séparer; ainsi que *continu* vient de *continuari*, durer sans interruption.

IX.

Différentes espèces de vérités en arithmétique.

L'arithmétique est définie avec raison, la science des nombres, parce que son but est d'en faire connaître les diverses propriétés. Rien ne serait plus long et plus difficile que cette science, si l'on n'eût simplifié les expressions des divers nombres, en n'employant pour les représenter que peu de caractères combinés d'une manière simple et facile à retenir. Nous ne cherchons pas ici combien la convention reçue de n'employer que dix de ces caractères et de leur donner deux sortes de valeurs, l'une *absolue*, qui tient à leur forme et leur fait toujours désigner le même nombre d'unités; l'autre *relative*, qui dépend de la place qu'ils occupent dans la même expression numérique, et donne à ces unités une valeur croissante en progression décuple en allant de droite à gauche; nous ne cherchons pas, dis-je, combien une telle hypothèse a d'inconvénients ou d'avantages, relativement à toute autre également possible. Mais ce qu'il nous importe d'observer, c'est qu'un système de numération, quel qu'il soit, introduit dans l'arithmétique des propriétés des nombres, purement *hypothétiques* ou relatives à ce système; tandis que d'autres, tenant à la nature même de la quantité discrète, sont *absolues*, indépendantes du système reçu, et seraient les mêmes dans toutes les numérations possibles. Celles-ci appartiennent proprement à l'arithmétique universelle, qui s'étend sur tous les nombres et sur tous les systèmes de numération imaginables. Avant de parler de cette sorte d'arithmétique, tâchons de dévelop-

per un point important de la science du calcul, c'est la notion des nombres opposés.

X.

Notion des nombres opposés.

Pour parvenir à cette notion, il faut observer que les quantités concrètes, et par conséquent les nombres concrets qui les représentent, offrant toujours à notre esprit des êtres revêtus de certaines qualités ou déterminations particulières, il peut arriver que dans les divers nombres de cette espèce, ces déterminations soient contraires les unes aux autres, et qu'il faille avoir égard à cette opposition, comme à une condition qui, modifiant la question proposée, doit nécessairement influer dans le résultat. En effet, si quelqu'un demande, quel sera le mouvement du corps A, poussé d'un côté par une force comme 8, et du côté opposé par une force comme 12, la réponse ne saurait être juste, sans avoir égard à l'opposition des forces, comme à une condition tellement essentielle à la question proposée, que si elle était ôtée, ou changée, ou modifiée d'une manière quelconque, la réponse devrait être toute différente de ce qu'elle sera dans cette hypothèse : il en serait de même pour un grand nombre de cas semblables à celui-ci. Il faut donc alors tenir compte de cette condition, en l'exprimant arithmétiquement ; c'est-à dire, en faisant sur les nombres 8 et 12 qui représentent ces forces, les mêmes opérations ou changements que l'opposition produit en elles quand on les ajoute ensemble. Or, l'expérience nous apprend qu'alors

la plus petite se réduit à zéro, et que la plus grande ne conserve que son excès sur la première, ou bien que de ces deux forces réunies en une seule, il n'en reste que la différence. Il faudra donc, pour avoir le résultat de cette réunion ou bien de *l'addition* de ces forces opposées, soustraire le nombre 8 du nombre 12, en écrivant 12 — 8, afin que la formule arithmétique exprime juste ce qu'elle doit exprimer. On voit donc qu'ici on ne peut obtenir le vrai résultat de l'addition des forces opposées, que par la soustraction des nombres qui les représentent. C'est là ce qu'on a entendu quand on dit (*arith. n.°* 41) que la propriété essentielle des nombres opposés, est que *l'addition de l'un diminue l'autre*, ou bien que *leur addition se change en soustraction ;* et de là il s'ensuit que la soustraction doit se faire par une addition ; premièrement, parce qu'elle est une opération contraire à l'addition ; secondement, parce que la soustraction étant toujours une décomposition, soustraire la force 8 de la force opposée 12, c'est décomposer celle-ci en deux forces opposées dont elle est la somme, et dont l'une est 8. Il faut donc que celle qu'on cherche soit 20 ; puisque, d'après ce que nous venons de dire sur l'addition, il n'y a qu'une force comme 20, qui, ajoutée à une force opposée 8, puisse donner 12. On aurait donc eu le vrai résultat de cette soustraction, en ajoutant la force 8 à la force 12 de cette manière, 12 + 8 ; d'où il faut conclure qu'entre ces quantités la soustraction se fait par l'addition des nombres qui les représentent. Ce que nous venons de dire

ici de deux nombres qui expriment des forces opposées, peut se dire et se prouver de même de deux autres nombres qui exprimeraient des quantités opposées entre elles d'une manière quelconque; c'est-à-dire, ou bien par leurs effets contraires, comme sont les dettes et les biens réels; ou bien par leur signification, comme sont les exposants d'une même quantité quand ils désignent les opérations contraires de multiplication ou de division; ou bien par leur situation, comme ceux qui expriment les valeurs de deux lignes droites situées en sens contraires par rapport à un plan, à une autre ligne ou bien à un point fixe quel qu'il soit. De façon que, d'après la nature des nombres opposés, on peut dire, en général, que leur *addition doit se changer en soustraction, et leur soustraction en addition.* C'est donc avec fondement que cette propriété a été prise pour l'attribut essentiel de ces nombres, et d'après lequel on a cru pouvoir les définir. Cette définition a paru pour la première fois dans ces éléments, et toute simple qu'elle est, elle forme une notion importante dans la théorie des nombres, sans laquelle on ne saurait se faire d'idée exacte sur plusieurs opérations qu'on leur fait subir.

XI.

Conséquences qui s'ensuivent de cette notion.

Ici se présentent des conséquences essentielles à déduire de cette manière de définir les nombres opposés. La première, que les qualités ou déterminations contraires dans les quantités nombrées étant la seule cause de leur opposition, il n'y a que les nombres concrets qui puissent être opposés. La seconde,

que les nombres opposés, quoique hétérogènes entre eux (IV) ne diffèrent cependant que par la seule qualité ou détermination qui les rend opposés, et qu'ainsi, abstraction faite de cette qualité, ces nombres deviennent homogènes ou propres à s'augmenter les uns les autres. C'est pour cela qu'une ligne et une surface, un mouvement et une étendue, quoique dirigés en sens contraires par rapport à un point fixe, ne sauraient donner naissance à des nombres opposés parce qu'abstraction faite de leur situation contraire, ces quantités sont encore hétérogènes entre elles. La troisième conséquence est que les nombres opposés désignent les uns et les autres de vraies quantités, puisque ne différant entre eux que par la seule qualité contraire qui fait leur opposition, ils peuvent, chacun dans leur espèce, être augmentés et diminués à volonté. Ainsi quand on a dit que les nombres négatifs sont plus petits que zéro, ou bien l'on a avancé une erreur, puisque zéro étant la limite de tous les décroissements possibles d'une quantité, on n'en peut concevoir de plus petite que celle qui est parvenue à ce terme; ou bien on s'est servi d'une expression impropre pour désigner une vérité. Car si l'on entendait par là que, relativement à un nombre positif, on en est plus éloigné avec le négatif qu'avec zéro, on aurait raison de dire que le nombre négatif est plus petit que zéro; mais comme la même chose a lieu pour un nombre positif relativement à un négatif, on pourrait dire également que le positif est plus petit que zéro; et par conséquent cette manière de définir un nombre négatif, ne serait pas exacte,

exacte, parce qu'elle pourrait convenir à toute autre chose.

XII.

Ici se présente naturellement une objection contre la manière dont nous avons défini les nombres opposés. Car, dira-t-on, puisque ces nombres représentent toujours des quantités hétérogènes, comment pourront-ils être ajoutés ensemble ou soustraits les uns des autres, ainsi qu'on le suppose dans la définition? Mais cette difficulté a déja été résolue par Wolf. D'après cet auteur, l'addition de deux nombres opposés n'étant qu'une soustraction faite sur le plus grand d'autant d'unités qu'il s'en trouve dans le plus petit, et la soustraction, au contraire, étant une augmentation faite dans un nombre d'autant d'unités qu'il s'en trouve dans l'autre, de pareils changements sont toujours possibles, pourvu que ces nombres ayent la même unité quant à sa valeur, bien qu'elle soit différente quant aux attributs; et l'espèce d'hétérogénéité qui se trouve dans les quantités opposées, exige même que ces changements soient faits de cette manière.

Objection contre la définition des nombres opposés.

XIII.

Les nombres opposés étant admis dans le calcul, on a cherché les moyens de leur faire subir toutes les opérations qui se pratiquent sur les purs nombres abstraits. Les règles de l'addition et de la soustraction ont dû se présenter aisément, parce qu'elles sont fondées sur la nature même de ces nombres; mais la multiplication ou la division des uns par les

A proprement parler, il n'est pas possible de multiplier ou de diviser les nombres opposés les uns par les autres.

autres ont dû paraître impossibles. Car, pour ne parler que de la première de ces opérations, on sait que, par sa nature, elle exige pour multiplicateur un nombre abstrait. Comment donc sera-t-elle praticable entre deux nombres concrets, tels que sont toujours les nombres opposés? D'ailleurs, il faut que, dans tous les cas, le produit soit au multiplicande, comme le multiplicateur est à l'unité. Or, si le produit n'est pas de la même espèce que le multiplicande, comme il arrive souvent en multipliant les nombres opposés les uns par les autres, comment comparer ensemble ces deux nombres pour établir entre eux une analogie aussi essentielle à l'opération? Une telle comparaison serait absolument impossible, et par conséquent il n'est pas plus permis, à proprement parler, de multiplier deux nombres opposés l'un par l'autre, que de multiplier un espace par un temps, une ligne par une ligne, ou un mouvement par une masse.

XIV.

On explique dans quel sens ces opérations sont possibles. Raison de la règle des signes dans la multiplication.

Dans quel sens faut-il donc considérer la multiplication de nombres opposés, afin de la concevoir possible? C'est en faisant abstraction du signe du multiplicateur, et considérant ce facteur comme un pur nombre abstrait. Ainsi pour pouvoir multiplier $4-\sqrt{3}$ par $+2$, il faudra d'abord négliger le signe du multiplicateur, et prendre deux fois la quantité $4-\sqrt{3}$, ce qui s'indiquera ainsi : $2(4-\sqrt{3})$, et s'énoncera en disant : $4-\sqrt{3}$ pris deux fois, qui donne $8-\sqrt{12}$. Ce sera là le vrai produit,

d'après lequel on formera l'analogie qui naît de la nature de la multiplication. Mais ce produit ayant des signes, et pouvant toujours être écrit à la suite d'un terme quelconque A, qui entre ou qui peut être supposé entrer dans la même formule numérique, quelque chose doit indiquer s'il faut l'ajouter à ce terme ou s'il faut l'en soustraire. Or, cette indication ne peut être donnée que par le signe qui sera en tête de l'expression même, ou bien qui précédera le multiplicateur dans $2(4-\sqrt{3})$. L'on écrira donc alors $A-2(4-\sqrt{3})$, et cela désignera que du terme A il faut soustraire la quantité $4-\sqrt{3}$, prise deux fois, ou bien $8-\sqrt{12}$, ce qui donnera, d'après les règles de la soustraction, $A-8+\sqrt{12}$. Si le multiplicateur eût été positif, on aurait eu $A+8-\sqrt{12}$, parce qu'il aurait fallu ajouter le vrai produit, savoir $8-\sqrt{12}$, au terme A, ainsi que l'aurait indiqué le signe + du multiplicateur mis en tête de cette expression. On voit donc que la valeur du multiplicateur désigne combien de fois il faut prendre le multiplicande pour former le produit, et que le signe qui le précède, indique laquelle des deux opérations ou d'addition ou de soustraction on doit faire subir à ce produit. De façon que quand on dit que le produit de deux nombres négatifs est positif, par exemple, que celui de -6 par -3 est $+18$, ce n'est là qu'une manière abrégée de désigner à la fois et le vrai produit de -6 par le nombre abstrait 3, lequel est -18, et la soustraction de ce produit d'un terme quelconque A, qui le précède ou qui peut être sup-

posé le précéder, sans que rien soit changé dans cette expression. C'est ainsi qu'on trouve quelquefois, en mathématiques, des énoncés qui, pris dans le sens littéral, seraient absurdes, mais qu'on conserve cependant, parce que bien entendus et pris dans le sens des inventeurs, ils expriment, avec précision, un précepte que la mémoire retient facilement.

La manière dont nous venons d'expliquer la multiplication des nombres opposés, fait disparaître, dans la prétendue multiplication des signes (comme si réellement on multipliait des signes), toutes ces obscurités qui ont engagé tant de géomètres à chercher la raison métaphysique de cette opération. Ils auraient dû chercher plutôt si l'opération en elle-même était possible, et alors, en expliquant en quel sens elle l'est, la démonstration de la règle se serait présentée d'elle-même. Mais au lieu de suivre cette marche simple, la plupart ont voulu prouver la vérité de la règle par l'exactitude des résultats; comme si, en mathématiques, un résultat exact dispensait de démontrer la règle et d'en faire disparaître l'obscurité ou plutôt l'absurdité apparente que son énoncé peut présenter.

XV.

Raisons qu'on a eues de s'écarter de la définition ordinaire de la division.

Les difficultés que nous venons de trouver dans la multiplication des nombres opposés, se présentent dans la division de ces mêmes nombres, et on suivra, pour les résoudre, une marche toute semblable; mais avant d'en venir là, tâchons de fixer

avec justesse l'idée qu'on doit se former de la division. D'après la définition ordinaire, c'est *une opération par laquelle on cherche combien de fois un nombre est contenu dans un autre.* Nous avons cru plus exact de la définir en disant, *que c'est une opération par laquelle on décompose un nombre en un nombre donné de parties égales, et on détermine la valeur de chacune.* Ce point des éléments tient à des questions importantes, et il n'est nullement indifférent d'adopter l'une ou l'autre de ces deux manières de définir la division. Voici les inconvénients qu'entraîne la première.

Et d'abord, en disant que par la division on cherche combien de fois une quantité est contenue dans une autre, on doit nécessairement confondre les raisons avec les fractions, comme on le fait communément. Ainsi puisque la fraction suivante $\frac{15}{4}$ vaut la somme de ces deux-ci $\frac{12}{4}$, $\frac{3}{4}$, il faut aussi que la raison de 15 à 4 vaille la somme des raisons de 12 à 4 et de 3 à 4. Or, d'après tous les géomètres qui ont enseigné à additionner les raisons, et d'après la démonstration que nous en avons donnée (alg. art. 219), la somme de ces deux raisons est la raison de 9 : 4, et non pas celle de 15 : 4. C'est là une première erreur qui s'ensuit de la définition ordinaire.

D'après cette même définition, il faut que dans toute division le quotient soit un nombre abstrait, puisqu'il indique combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende; et, comme une fraction représente le quotient du numérateur divisé par le dénominateur, il faudra aussi que toute fraction soit

nombre abstrait, ce qui n'est pas moins absurde que si l'on disait que tout nombre entier est nécessairement nombre abstrait.

Veut-on, au contraire, qu'une fraction puisse être un nombre concret? Alors un reste de division ne pourra point, dans tous les cas, être ajouté à la suite du quotient entier, parce que ce reste pourra être une fraction concrète, tandis que le quotient sera toujours nombre abstrait, et qu'il serait absurde d'ajouter ensemble ces deux quantités hétérogènes (§ IV).

D'ailleurs, quand on introduira les nombres opposés dans la division, comment pourra-t-on concevoir qu'un diviseur négatif est contenu dans un dividende positif; puisqu'on ne peut établir aucune raison entre eux, ainsi que nous le prouverons plus bas? Si l'on dit qu'on fait alors abstraction des signes, et qu'on considère le dividende et le diviseur comme des nombres abstraits, que deviendra le quotient? Il sera sans doute un nombre abstrait, et alors on ne pourra plus l'ajouter à des nombres opposés ou l'en soustraire, puisqu'il sera hétérogène avec eux.

Il semble donc que, non-seulement les propriétés des raisons et la nature des fractions, ne puissent s'accorder avec la définition ordinaire de la division; mais même que le calcul des nombres opposés y répugne essentiellement; tandis que tout se concilie avec facilité d'après la définition que nous en avons donnée. La manière d'opérer qui oblige de procéder de gauche à droite, non de droite à gauche, et d'abaisser les caractères du dividende un par un, la preuve qu'on ne peut écrire au quotient qu'un

caractère à la fois, l'opposition qu'il y a entre la multiplication et la division, l'étymologie même du mot *division*, qui annonce la décomposition ou le partage d'un nombre en plusieurs autres, tout enfin se développe facilement, et se présente ici comme de soi-même. Nous dirons donc, d'après cette définition, que le quotient est toujours de même nature que le dividende, puisqu'il en est partie; que le diviseur est un pur nombre abstrait, puisqu'il ne sert qu'à indiquer en combien de parties égales il faut partager le dividende; que les signes + ou — qui l'accompagnent quand on introduit les nombres opposés, marquent si le quotient doit être ajouté ou soustrait à ce qui le précède ou qui peut le précéder. Ainsi quand on dit que $\frac{+15}{+5} = +3$, et que $\frac{+15}{-5} = -3$, cela signifie que, dans l'un et l'autre cas, il faut prendre la cinquième partie de + 15, laquelle est toujours + 3; mais que, dans le premier, le diviseur positif indique que cette partie doit être ajoutée à zéro ou à ce qui précède, c'est pourquoi on l'écrit avec son signe + 3; et que, dans le second, le même diviseur négatif signifie que cette partie doit en être soustraite; voilà pourquoi on change son signe en écrivant — 3.

Ici se présente contre cette manière de définir la division une difficulté qu'il est nécessaire de résoudre avant de terminer cet article. Lorsque le dividende et le diviseur sont des fractions, proprement dites, le quotient est toujours plus grand que le

dividende : par exemple, s'il faut diviser $\frac{1}{4}$ par $\frac{1}{8}$, le quotient, d'après la règle donnée à l'article 53 de l'arithmétique, est le nombre entier 2. Or, dira-t-on, comment concevoir qu'un tel quotient puisse être partie d'un dividende plus petit que lui, ou résulter de sa décomposition, ainsi que cela devrait être d'après la définition qu'on veut faire adopter ici sur la division?

Mais par la manière même dont s'exécute cette opération sur les nombres fractionnaires, il est évident que ce n'est point là une division proprement dite; que ce sont plutôt deux changements contraires qu'on fait subir à la même fraction, dont l'un tend à l'augmenter en faisant croître son numérateur, et l'autre à la diminuer par l'accroissement de son dénominateur, et que le prétendu quotient qui en résulte, est ou plus grand ou plus petit que la fraction appelée dividende, suivant que l'un de ces changements est ou n'est pas compensé par l'autre.

Par là on voit encore que l'opération sur les fractions, désignée à l'article 52, sous le nom de *multiplication*, parce qu'on n'a pas d'autre terme pour l'exprimer, présente aussi deux changements contraires, faits à la fois sur le même nombre fractionnaire, et diffère essentiellement de la multiplication proprement dite que nous avons définie à l'art. 19 de l'arithmétique.

Du reste, c'est ainsi que sont considérées ces sortes d'opérations dans l'arithmétique universelle de Newton, où l'on trouve ce qui suit (pag. 6, édit.

de Leyde.) « Multiplicatio propriè dicitur quæ fit « per numeros integros.... Sed *aptioris voca-* « *buli defectu* multiplicatio etiam dici solet quæ « fit per fractos aut surdos numeros; quærendo « novam quantitatem in ea quacumque ratione ad « quantitatem multiplicandam quam habet multi- « plicator ad unitatem. » Et page 7 : « *Divisio pro-* « *priè est quæ fit per numeros integros* quærendo « novam quantitatem toties minorem quantitate di- « videndâ quoties unitas sit minor divisore. Sed, *ob* « *analogiam*, vox etiam usurpari solet cum nova « quantitas in ratione quacumque ad quantitatem « dividendam quæritur quam habet unitas ad divi- « sorem; sive divisor ille sit fractus aut surdus nu- « merus aut alia cujusvis generis quantitas. »

XVI.

Notion des incommensurables.

Outre les nombres entiers et fractionnaires qui se présentent les premiers, il en faut admettre une infinité d'autres, connus sous les noms d'*incommensurables* et d'*imaginaires*. Pour se former une idée exacte de ces nombres, cherchons d'abord ce que c'est que mesurer une quantité. *Mesurer une quantité n'est autre chose que déterminer en nombres entiers combien de fois une autre quantité, qu'on prend pour unité de mesure, est contenue dans la première.* Je dis que cette détermination doit être exprimée par des nombres entiers; car si on disait qu'un mètre, par exemple, est contenu dans une ligne droite $\frac{1}{3}$ de fois ou deux fois et $\frac{1}{3}$, ce n'est pas

le mètre qu'on présenterait alors pour unité de mesure, mais seulement le tiers du mètre, qui serait une aliquote exacte de cette ligne. Ainsi, non-seulement toute unité de mesure, doit être homogène à la quantité mesurée, puisqu'elle en est conçue comme partie ; mais encore deux quantités n'ont pas de commune mesure, ou bien elles sont *incommensurables entre elles*, quand elles n'ont aucune aliquote commune. Or, l'arithmétique nous apprend qu'il y a une infinité de nombres de cette espèce, et qu'ainsi entre ceux-là aucune valeur numérique ne peut présenter à l'esprit une détermination exacte de leur rapport ; tels sont, par exemple, 3 et $\sqrt{12}$. Cependant on ne peut douter que 3 ne soit plus petit que $\sqrt{12}$, et qu'il n'en puisse être conçu comme une partie quelconque, tandis qu'il ne saurait être partie de $\sqrt{-12}$. C'est pourquoi 3 et $\sqrt{-12}$, que nous avons appelée une *imaginaire*, sont plus qu'incommensurables ; ils sont *incomparables* entre eux.

XVII.

Les incommensurables et les imaginaires sont des nombres.

Mais quoique deux quantités soient incommensurables ou même incomparables entre elles, il ne s'ensuit pas qu'elles le soient avec toute autre. La nature de la quantité ne permet point d'imaginer une incommensurabilité absolue. Car de là que toute quantité est susceptible d'accroissement ou de diminution, on en peut concevoir une autre de la même espèce qui soit double, triple, etc. de

celle-là. C'est ce qui prouve que les incommensurables et même les imaginaires, doivent être mises au rang des nombres. Car $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-9}$, pouvant prendre cette forme $1\sqrt{-1}$, $2\sqrt{-1}$, $3\sqrt{-1}$, on ne peut nier que la première de ces imaginaires ne soit la moitié de la seconde et le tiers de la troisième; et qu'ainsi avec cette première, prise comme unité, on ne puisse former les autres par une continuelle répétition ; ce qui suffit pour donner l'idée du nombre (§ VI).

XVIII.

Il y a une infinité d'espèces différentes de nombres.

Si l'on demande donc combien il y a d'espèces de ces nombres ou incommensurables ou imaginaires, on répondra qu'il y en a une infinité d'infinités d'espèces différentes. Pour se convaincre de cette vérité, il suffit d'observer que toute incommensurable peut être nombrée avec une infinité d'autres. Ainsi $\sqrt{2}$, par exemple, peut être nombrée avec $\sqrt{8}$, avec $\sqrt{18}$, avec $\sqrt{32}$, avec $\sqrt{50}$, et toujours sans fin; de sorte que prenant le premier de ces nombres pour unité, on peut dire que pour avoir le second, il faut ajouter cette unité deux fois à zéro, trois fois pour avoir le troisième, quatre fois pour avoir le quatrième, etc. Si au lieu de $\sqrt{2}$ on eût pris pour unité $\sqrt{3}$, on aurait formé une suite de nombres, savoir, $\sqrt{12}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{75}$, etc. qui contiendrait cette unité, 2, 3, 4 fois, et tous seraient incommensurables avec les premiers. Si au lieu de $\sqrt{2}$, j'eusse pris pour unité

la racine troisième, ou quatrième, ou cinquième de ce même nombre, j'aurais trouvé une infinité d'espèces différentes d'autres nombres incommensurables, soit entre eux, soit par rapport aux nombres entiers ou fractionnaires. De sorte qu'un nombre, quel qu'il soit, peut donner naissance à une infinité d'incommensurables, et la même chose pouvant se dire des imaginaires, on en conclura que l'une et l'autre espèce de ces quantités rentre dans la classe générale des nombres.

XIX.

Notion de l'algèbre : l'algèbre ne renferme pas la géométrie dans son objet.

Cette multitude infinie de nombres de différentes espèces, donne un si vaste objet à la science du calcul, qu'il est impossible de l'embrasser dans toute son étendue en se servant de chiffres pour représenter les nombres, et de prouver, par ce seul moyen, qu'une propriété convient à tous, et doit être mise au rang des propriétés générales. Je suppose qu'avec ce seul secours, on veuille démontrer celle-ci, *que, dans tous les cas, la somme de deux nombres, multipliée par leur différence, donne pour produit la différence de leurs quarrés*. On prendra d'abord pour exemple deux entiers ; mais, après avoir établi cette vérité dans ce cas particulier, on n'en peut déduire tout au plus si ce n'est qu'elle a lieu pour tous les autres entiers. Il restera à faire voir que la même propriété s'étend aux nombres fractionnaires, puis aux incommensurables et à toutes les espèces d'incommensurables qui varient à l'infini; car l'induction ou l'analogie, la plus faible de toutes les preuves en ma-

thématiques, cesse même d'être admissible, lorsque les données sur lesquelles on l'établit, ne sont pas parfaitement semblables. Ainsi, en n'employant que des chiffres, la vie d'un homme se passerait toute entière avant qu'il n'eût démontré la plus simple des propriétés générales des nombres. Les anciens, afin d'éviter cet inconvénient, se servaient de lignes droites pour représenter les valeurs numériques quelconques, et arrivaient au même but par le secours de la géométrie; car des livres entiers d'Euclide ne sont autre chose qu'une arithmétique universelle, cachée sous des formes géométriques (*). Mais combien est plus simple l'idée de substituer aux chiffres, qui ne peuvent exprimer qu'un nombre déterminé, des symboles qui les représentent tous à quelque espèce qu'ils appartiennent, et l'*arithmétique symbolique* qui naît de là, connue sous le nom d'*Algèbre*, étendant ses combinaisons sur toute sorte de nombres, devient, dans toute la

(*) Je ne citerai que le livre second, dont toutes les propositions peuvent se traduire et se démontrer algébriquement. Je citerai encore plusieurs propositions du traité *des données*, notamment les théorèmes 86 et 87, qui renferment la construction et la solution géométrique d'une classe très-étendue d'équations du quatrième degré. Je pourrais rapporter une foule d'autres exemples qui tous confirment l'opinion de ceux qui ont prétendu que les anciens connaissaient une sorte d'analyse algébrique dont ils se servaient comme d'un *instrument d'invention;* mais que, plus sévères que nous, ils démontraient ensuite par la synthèse les vérités découvertes par cette analyse.

rigueur de l'expression, une *arithmétique universelle*. Dès-lors, son objet ne lui permet plus d'exposer les vérités hypothétiques des nombres, desquelles nous avons parlé plus haut, elle s'élève aux vérités générales, fondées sur la nature même de ces quantités. Mais en étendant et simplifiant ainsi ses moyens, l'algèbre ne cesse point d'être la science des nombres, une vraie arithmétique, par conséquent bornée à la quantité discrète. C'est pourquoi ceux qui ont voulu l'étendre jusqu'à la quantité continue, et qui prétendent qu'elle renferme dans son objet l'arithmétique ordinaire et la géométrie, se sont fait une idée fausse de cette science. Cette erreur vient de ce qu'on a vu que, par son secours, on démontrait des vérités qui sont du ressort de la géométrie. Mais ces vérités n'exprimant que des rapports de grandeur entre des lignes ou d'autres quantités géométriques, représentées par des nombres, ou bien des rapports de situation, tels que les signes + ou — les indiquent assez, peuvent être démontrées, non-seulement par l'algèbre, mais même par l'arithmétique ordinaire; et dès-lors, ou cette raison ne prouve rien, ou elle prouve que l'arithmétique, comme l'algèbre, embrassent également la géométrie dans leur objet; ce qui est évidemment absurde.

Ainsi l'algèbre ne pouvant être regardée que comme une extension de l'arithmétique, qui lui fournit la plupart de ses principes, ce serait dépayser, pour ainsi dire, chacune de ces sciences, que de les séparer l'une de l'autre par la géométrie.

D'ailleurs, on se priverait gratuitement des secours que l'algèbre présente pour démontrer plusieurs vérités d'arithmétique ordinaire et de géométrie. La nature de ces sciences fixe donc l'ordre dans lequel on doit les traiter dans les éléments, et fait voir que ce n'est pas sans raison que nous avons établi, en arithmétique, des principes nécessaires à l'algèbre, et que nous avons renvoyé à l'algèbre la preuve de certaines méthodes qui appartiennent à l'arithmétique. L'affinité de ces deux sciences permet d'en user ainsi, et la généralité des expressions algébriques force quelquefois de recourir à ces sortes de transpositions, afin d'obtenir des démonstrations simples et applicables à tous les cas.

X X.

Définition générale des puissances.

La définition générale des puissances que nous avons donnée au n.° 124, est le premier endroit de nos éléments d'algèbre qui demande quelque éclaircissement. Il nous semble, en effet, que cette définition ne saurait être exacte si l'on n'en peut déduire la vraie notion des exposants, leurs principales propriétés, et la preuve directe que, non-seulement un nombre quelconque, mais même zéro, peut servir d'exposant à une quantité. Or, si l'on se contente de dire, avec la plupart des auteurs, qu'une puissance est le produit d'une quantité multipliée un certain nombre de fois par elle-même, cette notion ne mènera jamais à admettre la possibilité de l'exposant zéro, moins encore aux exposants négatifs ou à leurs diverses propriétés.

On voit, au contraire, que tout s'ensuit naturellement de la définition que nous avons donnée, et qu'ainsi ce n'est pas sans raison que nous l'avons préférée à toute autre. L'idée de faire entrer l'unité dans la définition des puissances, nous paraît assez remarquable pour dire ici que Privat de Molière est le premier qui l'ait employée, en définissant la première puissance d'un nombre *le produit de l'unité multipliée par ce nombre*. Mais outre que cet auteur ne l'a point étendue aux autres puissances, et qu'ainsi il n'a pas donné une définition générale, il ne s'en est servi ensuite pour aucune propriété des exposants, et cette importante notion est restée imparfaite et presque stérile entre ses mains.

XXI.

Manière nouvelle de réduire toutes les imaginaires à la forme de celles du second degré.

Après les puissances, il nous reste à parler de la réduction des racines imaginaires à la forme du second degré. Les géomètres n'ignorent pas que d'Alembert est le premier qui ait prouvé la possibilité de cette réduction, qu'il l'a même étendue aux imaginaires *exponentielles*, ou bien à celles qui ont d'autres imaginaires pour exposants. Mais comme cette vérité appartient à l'algèbre ordinaire, et que d'ailleurs d'autres vérités d'analyse en dépendent, on a dû chercher à l'établir par une méthode différente de celle de cet illustre géomètre, toute fondée sur le calcul intégral. Dans des traités d'algèbre très-estimés et très-estimables d'ailleurs, elle n'a été prouvée jusqu'ici que par induction, genre

genre de preuve qui ne dispense pas d'en chercher une autre. Le recueil de l'Académie de Turin renferme un mémoire de M. de Foncenex, où cette réduction est établie directement; mais cet ouvrage nous était inconnu lorsque ces éléments ont été publiés pour la première fois. D'ailleurs, la marche que nous avons suivie dans cette réduction, outre qu'elle offre une route nouvelle pour arriver au même but, présente quelques propriétés des imaginaires qu'on ne connaissait pas encore; et quoique toujours assez aisée pour n'être pas au dessus des éléments, elle conduit, par un procédé simple à la réduction même des imaginaires exponentielles à la forme du second degré, avantage qui ne se trouve que dans la méthode de d'Alembert. Nous n'avons supprimé la preuve de cette réduction que parce qu'elle est de peu d'utilité dans les éléments, et qu'elle suppose quelques propriétés des logarithmes, qui ne sauraient être démontrées avant d'arriver au chapitre où nous traitons des imaginaires; elle est consignée dans les mémoires de la ci-devant Académie des sciences de Toulouse pour l'année 1777.

XXII.

Eclaircissements sur la définition des raisons.

En suivant l'ordre des matières traitées dans ces éléments, et qui demandent quelque discussion, nous devons parler ici des raisons. C'est un point important sur lequel nous avons cru devoir, pour une plus grande exactitude, nous écarter des idées reçues chez la plupart des élémentaires modernes.

Avant d'en venir à ces changements, cherchons d'abord à nous former une notion exacte de ce qu'on doit entendre en mathématiques par *raison*.

Une des principales facultés de notre ame, c'est d'avoir plusieurs idées à la fois, de pouvoir les rapprocher l'une de l'autre par une *juxta-position* purement intellectuelle, qu'on appelle *comparaison*, et de cette comparaison de deux idées d'en déduire une troisième, qui nous représente l'état ou la façon d'être de chacune des idées comparées relativement à l'autre. Cette troisième idée, qui naît de la comparaison de deux autres, s'appelle un *rapport*, et celles que nous comparons ensemble pour obtenir ce rapport, sont *les termes de la comparaison*. L'innombrable multitude d'objets que nous pouvons comparer ensemble, les différentes façons de les envisager, les rapports divers que nous en pouvons déduire, n'ont d'autres bornes que celles de l'esprit humain, et ont donné naissance à ce que nous appelons science, vérité, opinion, etc. Ainsi l'idée de *rapport*, en général, est très-étendue, et renferme les résultats de toutes les comparaisons que notre esprit peut établir entre des êtres quelconques, soit physiques, soit métaphysiques, soit moraux. Revenons aux rapports des quantités, qui seuls font l'objet de la science que nous traitons.

Tandis que nous considérons les quantités en général, ou bien que nous les envisageons simplement comme des êtres renfermant une multitude déterminée de parties, nous n'en pouvons déduire que des rapports fondés sur la comparaison mutuelle

de cette multitude de parties; et parce que ceux-là nous donnent la notion relative de *grand* et de *petit*, et par conséquent celle de *grandeur*, nous les avons appelés *rapports de grandeur*. Mais sitôt que nous comparons ensemble des quantités particulières ou revêtues de certaines qualités, nous établissons des rapports dépendants de ces qualités. Ainsi, en comparant ensemble deux portions d'étendue, par exemple, deux lignes droites, cette comparaison fournit à l'esprit, non-seulement des rapports fondés sur leur grandeur, mais encore sur leur situation respective; et ceux-ci, nous les exprimons par les termes de parallélisme, d'obliquité, de concurrence, d'angle, etc. Ce sont ces rapports que la géométrie seule peut faire connaître, et auxquels on ne peut jamais parvenir par le calcul. D'après cela, on voit pourquoi nous avons défini la raison, *le rapport de grandeur qui se trouve entre deux quantités, dont l'une peut être partie de l'autre*. Et quoique, dans le langage ordinaire, on confonde souvent l'idée de raison avec celle de rapport, il n'en est pas moins vrai que celle-ci est infiniment plus étendue que la première, qu'elle est le genre, tandis que l'autre n'est que l'espèce, et qu'ainsi on a été fondé à la faire entrer dans la définition de la raison.

XXIII.

Conséquences à déduire de cette définition.

D'après cette définition, il se présente ici deux observations essentielles: la première, qu'on ne peut établir une raison entre des quantités hétérogènes,

parce que notre esprit ne pouvant considérer l'une comme partie de l'autre, ne saurait former aucune comparaison entre elles; la seconde, qu'entre deux quantités égales *a* et *b*, il n'existe, à proprement parler, aucune raison, parce que n'y ayant point de motif suffisant pour affirmer que *a* est partie de *b*, plutôt que *b* partie de *a*, il n'y a entre ces êtres ni grand ni petit, ni par conséquent grandeur ou rapport de grandeur, lequel seul peut donner la notion de la raison. D'ailleurs le rapport d'égalité est évidemment la limite qui sépare les raisons de *majorité* d'avec celles de *minorité*, c'est-à-dire, qu'il est le passage des raisons positives aux négatives. Or, cette limite, ou bien ce passage du positif au négatif dans une classe quelconque de quantités opposées, ne saurait jamais être une quantité; par conséquent ici il ne peut point former une raison.

De cette même définition de la raison, on conclura encore que ce qu'on désigne communément sous le nom de *raison arithmétique*, et qui consiste dans la différence qu'il y a entre deux quantités, ne saurait être appelé une raison proprement dite. En effet, cette raison arithmétique ne donne aucune idée du rapport de grandeur qu'il y a entre deux quantités; car autrement il faudrait dire que puisque la raison arithmétique de 100 à 99 est égale à celle de 2 à 1, 100 est aussi grand par rapport à 99, que 2 l'est par rapport à 1, ce qui est absurde. Aussi les anciens n'ont jamais donné le nom de raison à ces différences, et si les modernes en ont usé autrement, ce n'est que par un étrange abus

des mots qu'il serait bon de corriger en renonçant à cette mauvaise expression.

XXIV.

Les raisons étant de vraies quantités, il a fallu, pour se faire une idée de leur valeur, chercher à les mesurer. Or, cette mesure, presque tous les auteurs élémentaires l'ont prise du quotient que donne un des termes de la raison divisé par l'autre. Nous croyons, au contraire, avec de grands géomètres, que cette méthode doit être rejetée. 1.° Dans le fond, elle ne fait que changer une raison en une autre qui lui est égale, et non point la mesurer. En effet, quand on dit, par exemple, que la raison 18 : 3 vaut 6, on ne dit autre chose si ce n'est que la raison de 18 : 3 vaut celle de 6 : 1; puisque d'après leurs propres principes, la raison du dividende au diviseur vaut celle du quotient à l'unité. Or, réduire ainsi une raison à une expression plus simple, n'est pas encore l'avoir mesurée. 2.° Pour pouvoir ainsi mesurer les raisons, il faut admettre la définition ordinaire de la division, par laquelle on regarde le diviseur comme un nombre contenu dans le dividende; il faut donc adopter toutes les inexactitudes qui s'ensuivent de cette manière d'envisager l'opération, desquelles nous avons fait le détail ci-dessus. 3.° En suivant cette méthode des quotients, il faut nécessairement prendre les fractions pour des raisons, ainsi qu'on le fait communément; et comme, dans toute raison, les deux quantités com-

Les quotients ne mesurent pas les raisons.

parées sont de même espèce; il faudra que, dans toute fraction, le numérateur et le dénominateur soient aussi deux nombres d'espèces semblables. Dès-lors le dénominateur ne sera donc plus un nombre abstrait, qui exprime en combien de parties égales on a divisé l'unité, et le numérateur ne sera plus indifféremment ou abstrait ou concret, suivant que l'unité qu'on divise est elle-même abstraite ou concrète, ce qui renverse l'exacte notion qu'on doit se faire des fractions. 4.° En confondant les raisons avec les fractions, il faut qu'on prenne la somme des unes, ainsi qu'on prend celle des autres, c'est-à-dire, en les réduisant au même dénominateur, et prenant la somme des numérateurs; par conséquent la somme de ces raisons continues 2 : 4, 4 : 8, 8 : 16, vaudra celle de ces trois fractions $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ou bien $\frac{3}{2}$. Cependant nous avons incontestablement prouvé (et en cela nous nous accordons avec des géomètres du premier rang, qui ont traité cette matière) que la somme de ces raisons est la raison de 2 : 16, bien différente de celle de 3 : 2, qu'on devrait trouver d'après la méthode des quotients.

XXV.

Supplément à la démonstration de la règle donnée pour additionner les raisons.

Pour détruire la règle que nous avons donnée à l'article 219 sur l'addition des raisons, il faut dire, ou bien que plusieurs raisons ne peuvent point former des quantités continues, ou bien que, dans ces sortes de quantités, la somme n'est point représentée par une autre quantité de la même espèce, qui

s'étend depuis l'origine de la première jusqu'au terme de la dernière. Or, l'une de ces vérités est fondée sur la notion même du continu, telle que nous l'avons présentée plus haut (§ VIII); et pour prouver l'autre, il suffit de faire les observations suivantes.

1.° Plusieurs quantités continues quelconques peuvent être représentées par autant de lignes droites, pourvu que ces lignes gardent entre elles les mêmes raisons ou rapports de grandeur qui ont lieu entre ces quantités.

2.° La manière de prendre la somme de ces quantités continues, sera la même que celle de trouver la somme des lignes droites qui les représentent. Or, ces lignes ont chacune deux limites qui sont les deux points où elles se terminent; et comme on peut concevoir qu'elles ont été formées par des accroissements successifs en allant d'une limite à l'autre, on peut dire que *l'origine* de la ligne est la limite d'où partent ces accroissements, et que l'autre limite où ils se terminent en est le *terme*. Cela posé, pour prendre la somme de ces lignes droites, il faudra, 1.° que tous leurs points soient disposés en ligne droite, puisqu'autrement leur somme ne formerait pas une ligne de l'espèce de celles qu'on veut sommer, ce qui serait absurde. Il faudra, 2.° que le terme de la première de ces lignes se confonde avec l'origine de la seconde, le terme de la seconde avec l'origine de la troisième, et ainsi de suite; car si cela n'était pas ainsi, ou bien cette somme ne formerait pas une quantité continue, et

alors elle ne serait pas homogène avec les quantités qu'on veut sommer, ce qui répugne ; ou bien les parties prises ensemble pourraient surpasser le tout, ce qui répugne encore. Ainsi la somme de ces lignes droites ne peut être autre chose qu'une seule ligne droite tellement formée qu'une de ses extrémités se confonde avec l'origine de la première des lignes qu'on veut sommer, et que l'autre extrémité tombe sur le terme de la dernière de ces lignes. On doit donc dire également que la somme de plusieurs quantités continues est elle-même une quantité continue de l'espèce de celles qu'on veut sommer, laquelle s'étend depuis l'origine de la première de ces quantités jusqu'au terme de la dernière. C'est là ce qui justifie la manière dont nous avons pris la somme des raisons. Aucun des géomètres qui ont voulu les mesurer par des quotients, n'a entrepris de les sommer, bien qu'ils aient prétendu les multiplier les unes par les autres, comme si toute multiplication n'était pas une addition réelle, et que cette opération ne demandât pas pour multiplicateur un nombre abstrait ou absolu, et non point une raison.

XXVI.

Avantages de notre manière d'envisager les raisons.

Au lieu de tous ces inconvénients qu'entraînent les notions ordinaires, la marche que nous avons suivie apprend à faire subir aux raisons tous les changements qu'on fait subir aux autres quantités. D'ailleurs les dénominations de raison doublée, triplée, etc. ne portent plus à faux. N'emploie-t-on pas en effet une manière bien étrange de s'exprimer

quand on dit qu'une raison *doublée* d'une autre n'est pas précisément celle qui vaut le double de celle-là; mais bien celle qui résulte de la première, multipliée une fois par elle-même? Comme si chacune de ces dénominations *double* et *doublée*, suivant l'acception des mots, n'exprimait pas également l'état d'une quantité en tant qu'elle est une fois plus grande que celle qu'on lui compare. Mille inconvénients s'ensuivent donc de l'idée de mesurer les raisons par des quotients, au lieu que tout se concilie en les mesurant par une raison fixe qu'on prend pour unité. Dès-lors on se conforme à la vraie notion de mesure, que nous avons donnée plus haut : les définitions de la raison composée, ainsi que celles des raisons doublées, triplées, sous-doublées, sous-triplées, se présentent d'elles-mêmes; et surtout on prouve par là l'immédiate relation qui doit se trouver entre les raisons et les logarithmes, de laquelle découlent des idées lumineuses sur la théorie de ces nombres.

XXVII.

Notion des logarithmes.

Pour se convaincre de l'affinité qui règne entre les logarithmes et les raisons, il suffirait presque d'assigner l'étymologie du mot *logarithme*, qui ne peut se rendre littéralement que par *raisons des nombres* ou *nombre des raisons*. Cela prouve que dans l'esprit des inventeurs la notion des logarithmes avait un rapport immédiat avec celle des raisons; et c'est pourquoi nous disons (alg. 283) que ces nombres sont les *exposants des valeurs des*

raisons. C'est là la manière dont les envisageait Cotes, qui a dit, dans son traité, *de Harmonia mensurarum*, chap. 3, *logarithmi sunt rationum mensuræ numerales.* Saunderson, après lui, les a considérés de même, quoique, à la vérité, dans plusieurs endroits relatifs à cette importante matière, il se soit laissé entraîner par l'usage. Mais ce qui prouve mieux que toutes les autorités combien cette définition des logarithmes est exacte, c'est que toutes les autres s'en peuvent déduire par des conséquences évidentes, et surtout celle que donne Euler, lorsqu'il dit que les logarithmes des nombres ne sont autre chose que les *exposants des puissances auxquelles il faut élever un nombre quelconque pour former tous les autres.* Or, toute propriété qu'on peut déduire d'une autre a besoin de preuve, et ne saurait être admise dans une définition. Quant à ceux qui disent que les termes d'une progression arithmétique correspondants à ceux d'une progression géométrique, sont les logarithmes de ceux-ci, nous ne leur disputerons rien, si par là ils entendent se borner à une pure définition nominale; mais s'ils prétendent tirer de là une définition réelle de ces nombres, nous pouvons leur faire la même objection que nous faisons à Euler. Nous ajouterons encore qu'il y aurait dans cette définition une erreur plus importante, si, à l'exemple de certains géomètres, ils se croyaient en droit de prendre une progression arithmétique quelconque; car alors il pourrait s'ensuivre que le logarithme de l'unité ne fût pas o, ce qui renverserait tous les principes.

XXVIII.

Après avoir parlé des logarithmes, il nous reste à dire un mot sur les permutations et les combinaisons. Le principal motif qui nous a engagés à traiter cette question dans nos éléments, c'est que sans elle on ne saurait démontrer à la rigueur la loi des coèfficients dans la formule générale des puissances d'un binome. Cette loi des coèfficients une fois connue, nous nous en sommes servi pour prouver l'importante vérité d'analyse, que dans une équation la somme des racines forme le coèfficient du second terme, que la somme de leurs produits deux à deux forme le coèfficient du troisième, et ainsi de suite. Nous avons en cela renversé l'ordre que suivent certains auteurs, qui commencent par prouver cette vérité d'analyse par une simple induction tirée de la manière dont se forment plusieurs équations composées, et qui s'en servent ensuite pour établir la loi des coèfficients dans la formule des puissances; mais outre qu'une preuve par induction ne doit être donnée qu'au défaut de toute autre, on tombe alors dans une espèce de cercle vicieux, en voulant prouver la vérité d'une induction par une autre induction également incertaine. Nous avons aussi déduit la loi des coèfficients dans la formule des puissances de la théorie des permutations, plutôt que de celle des combinaisons, parce que cette voie nous a paru plus naturelle. Rien ne le confirme mieux que la méthode qu'elle nous fournit d'élever un polynome quelconque à une

Avantages que procure la théorie des permutations.

puissance quelconque, sans passer par l'immense détail des multiplications qu'il faut faire autrement. Quoique aucun des auteurs qui nous sont connus, n'ait donné cette méthode, elle est si simple, que nous ne croyons pas qu'elle ait pu échapper à tous ceux qui ont traité cette matière.

XXIX.

L'analyse : elle a dû être placée à la fin de l'algèbre.

Nous voici enfin parvenus à l'analyse que nous avons cru devoir présenter à la fin de l'algèbre, malgré l'usage contraire de certains auteurs. Deux raisons principales nous ont déterminés à placer ainsi cette partie essentielle du calcul algébrique. La première, que la plupart des questions qu'on cherche à résoudre par l'analyse, ne peuvent pas même être mises en équation, sans recourir aux propriétés des proportions et des progressions, et qu'il faut par conséquent connaître ces propriétés avant d'en venir là; la seconde, c'est que pour exposer quelques méthodes d'analyse, il faut auparavant connaître cette importante propriété des équations, que le coëfficient du second terme est la somme des racines prises avec un signe contraire; celui du troisième, la somme de leurs produits, prises deux à deux; celui du quatrième, la somme de leurs produits, prises trois à trois, etc. Or, comme nous l'avons déja remarqué, cette vérité ne peut être démontrée rigoureusement qu'en employant la loi des coëfficients dans les diverses puissances d'un binome, laquelle loi, pour être établie, suppose la théorie des permutations.

Voilà pourquoi l'analyse n'a été traitée ici qu'après avoir parlé de ces différentes questions.

XXX.

Raisons d'abréger l'analyse.

Bien des gens trouveront que cette partie immense du calcul algébrique, plus étendue à elle seule que toutes les autres ensemble, a été traitée par nous d'une manière trop abrégée. Mais le but de cet ouvrage ne nous permettait pas de l'étendre plus loin. D'ailleurs, on aime mieux essuyer ce reproche que celui qu'on peut faire à beaucoup d'auteurs élémentaires, de n'avoir parlé des plus grandes questions d'analyse, que pour les présenter avec l'inexactitude la plus frappante. Je n'en citerai d'autre exemple que celui de la fameuse règle de Descartes, qui, par les répétitions et les changements de signes, sert à discerner le nombre des racines positives ou négatives d'une équation. Or, non-seulement cette règle n'est point démontrée dans les livres élémentaires, quoiqu'elle se trouve dans presque tous, mais même aucun ne fait observer qu'elle devient inutile, si l'on ne sait déja connaître, sans solution d'équation, si la proposée contient ou ne contient pas des racines imaginaires. L'abbé de Gua, de l'Académie des sciences de Paris, est le premier qui ait dit tout ce qu'il y avait à savoir sur cette importante matière. Il a d'abord trouvé une méthode générale pour découvrir dans une équation, sans la résoudre, si elle contient des racines imaginaires ou non; puis il a démontré le

premier la belle règle de Descartes sur laquelle certains savants avaient élevé des doutes autrefois (*) et dont Wolf disait : *Theorema quod Harriotus per inductionem invenit, nemo hactenus demonstrare potuit* (**). Cependant quelque belle que soit la démonstration de l'abbé de Gua, on conviendra qu'elle aurait été trop embarrassante pour les commençants dans un ouvrage de l'espèce de celui-ci : c'est pour cette raison que nous n'avons parlé ni de la règle de Descartes, ni de la méthode de découvrir les racines imaginaires d'une équation.

XXXI.

Observations sur quelques endroits de l'analyse.

Dans le chapitre où nous exposons quelques propriétés des équations composées, nous nous sommes attachés de préférence à une méthode assez récente, par laquelle on trouve quel est celui des diviseurs du dernier terme qui peut servir de racine à une équation (***). Cette méthode est

---

(*) Voyez le premier mémoire de l'abbé de Gua, dans le Recueil de la ci-devant Académie des sciences de Paris, pour l'année 1742.

(**) Voyez Wolf. Math. univ. tom. I. p. 325. L'abbé de Gua fait voir que cette découverte appartient à Descartes, et qu'ainsi Wolf et Saunderson, qui en ont parlé d'après Wallis, se sont trompés en l'attribuant à Harriot.

(***) Nous citerions avec reconnoissance l'auteur de cette découverte, s'il nous était connu.

plus simple que celle de Newton, qu'ont employée jusqu'ici la plupart des auteurs. La manière dont nous prouvons que les racines imaginaires doivent être en nombre pair, et que deux à deux, elles ne peuvent différer que par le signe qui précède l'imaginaire, n'est qu'une conséquence de ce que nous avons dit ailleurs sur la réduction de toutes les imaginaires à la forme de celles du second degré. On ne peut même établir cette importante propriété des équations que par ce moyen ; ce qui prouve combien il était nécessaire de faire voir, à l'aide de l'algèbre ordinaire, que les imaginaires de tous les degrés peuvent se représenter par celles du second. Dans le peu que nous avons dit sur les équations du troisième degré, nous avons tâché de parvenir à l'expression générale des trois racines d'une manière simple et rigoureuse. Nous croyons avoir évité sur ce point le juste reproche que d'Alembert fait à la méthode ordinaire, et qu'on peut voir à l'article *Equation* du Dictionnaire Encyclopédique. Quant aux équations du quatrième degré, nous nous en sommes tenus strictement à ce qu'en a dit Euler, omettant même certains détails, et nous permettant seulement d'éclaircir quelques endroits qui auraient pu embarrasser les commençants. Cette méthode de solution est trop belle pour ne pas trouver place dans les livres élémentaires ; et nous regardons comme une distinction honorable pour celui-ci, d'être le premier qui ait été enrichi de la découverte de ce grand géomètre. Du reste, il a fallu supprimer des exemples, et resserrer dans

deux chapitres tout ce qu'on avait à dire sur les équations du troisième et du quatrième degré, afin de ne pas trop grossir ce volume, qui, n'ayant d'autre objet que de servir d'introduction aux éléments des sciences physico-mathématiques, aurait absolument pu omettre comme superflue toute la partie d'analyse qui va au-delà des équations du second degré.

XXXII.

GÉOMÉTRIE.

Objet de la géométrie.

L'idée que nous nous formons de l'étendue dont les diverses propriétés sont l'objet de la géométrie, est si simple et si distincte, qu'il nous paraît superflu (pour ne rien dire de plus) de chercher à la rendre plus claire par une définition. Laissant donc à part toute analyse de cette notion abstraite, sur laquelle la philosophie spéculative s'est assez vainement exercée, ne nous occupant pas même de chercher si l'étendue existe réellement, ou si elle n'existe pas, il nous suffit de savoir que telle que nous la concevons, elle se présente à notre esprit comme une quantité continue et susceptible de prendre une figure ou de clorre un espace. Les sensations étant l'origine de cette idée, comme de toutes les autres, l'étendue a été d'abord confondue avec la matière; et c'est par une première abstraction de l'esprit que nous l'en avons séparée, en nous représentant seulement l'espace qu'occupent les corps, sans attribuer à cet espace aucune des propriétés physiques

physiques qui les accompagnent. Considérée sous ce premier rapport, l'étendue a été appelée *solide*, dénomination impropre peut-être, mais qu'il faut conserver, parce qu'elle rappelle l'idée du corps auquel elle doit son origine. Cette étendue solide, ainsi que toute portion de matière qui peut la remplir, étant susceptible d'être mesurée dans trois divers sens (ce que nous exprimons en disant qu'elle renferme trois *dimensions*), a donné naissance par différents degrés d'abstraction à toutes les autres espèces d'étendue dont la géométrie recherche les propriétés. Elle est devenue une *surface* quand on n'a considéré que deux de ses dimensions, et alors l'une a été dite sa longueur, et l'autre sa largeur; elle a été appelée *ligne* en lui attribuant une dimension seulement qui devient alors sa longueur; enfin, quand on n'a voulu se représenter que la limite de cette ligne, ou le terme de tous les décroissements dont elle est susceptible, on a donné le nom de *point* à cette limite, à cette négation de toute étendue, et dont l'esprit se forme cependant une notion distincte, quoiqu'elle exclue toute idée de longueur, largeur et profondeur.

On voit donc qu'ici le point, la ligne, la surface, le solide, étant seulement des manières différentes d'envisager l'étendue, n'offrent à l'esprit que des êtres abstraits qui n'ont d'existence que dans notre entendement; que c'est pour aider l'imagination à les concevoir qu'on les représente sous des figures sensibles; et quoique leurs propriétés soient applicables à l'ordre physique avec plus ou moins d'exac-

titude, suivant la perfection des instruments qu'on y emploie, il n'en est pas moins certain, d'après ce que nous avons dit, que la géométrie est une science purement intellectuelle, dont l'objet n'existe ni ne peut exister dans la nature. C'est parce que cet objet est simple et qu'il se compose d'un petit nombre d'idées primitives clairement déterminées, qu'il est possible, dans cette science, de définir avec précision tous les rapports et toutes les idées complexes qu'elle embrasse, et au moyen de ces définitions de former une chaîne de vérités, liées intimement les unes aux autres, et qui toutes vont se rattacher à quelques principes ou axiomes que l'esprit admet immédiatement, et d'après l'évidence qui les accompagne.

XXXIII.

Deux espèces de vérités en géométrie : diverses méthodes pour les démontrer.

De ce que nous venons de dire sur l'objet général de la géométrie et sur les notions primitives qui servent de fondement à cette science, l'on en conclura qu'elle ne peut présenter à l'esprit que deux sortes de vérités, celles qui expriment des rapports de situation entre des lignes, des surfaces, des solides, ou celles qui expriment des rapports de grandeur entre ces mêmes quantités. Or, quoiqu'il n'y ait qu'une seule espèce de lignes droites, il y a une infinité d'espèces différentes de lignes courbes, de même que de surfaces et de solides, et tous ces êtres étendus pouvant varier à l'infini leurs situations respectives dans l'espace, admettant encore entre eux toute sorte de valeurs différentes ou de

rapports de grandeur différents, il s'ensuit que cette science est d'une étendue sans bornes; que les vérités découvertes ou les rapports connus, ne sont qu'un acheminement à ceux qui restent à découvrir encore, et que les facultés de l'esprit humain ne peuvent suffire à épuiser toutes les vérités qu'elle recèle.

Quelquefois le calcul suffit pour prouver ces vérités, et cela arrive ainsi lorsqu'ayant exprimé certaines portions d'étendue par des nombres, on conclut, pour ces sortes de quantités, les mêmes rapports que le calcul a fait découvrir entre les nombres qui les représentent. Mais quoique cette manière de démontrer les vérités géométriques soit aussi sûre, et souvent plus abrégée, que la méthode synthétique des anciens, nous en avons usé le plus rarement qu'il nous a été possible; persuadés que, pour éclairer l'esprit des commençants, et former le raisonnement, la marche ostensible de la synthèse est de beaucoup préférable à celle d'une analyse, nécessairement obscure, qui, toujours enveloppée des règles et des formes du calcul, fait, pour ainsi dire, raisonner mécaniquement en observant ces règles, et arrive ainsi au but qu'on se propose, sans éclairer la route qui y mène.

Outre cette manière générale de procéder par voie de synthèse des vérités connues à celles qui ne le sont pas, les anciens nous ont transmis deux formes de raisonnement très-usitées parmi eux en géométrie, la *réduction à l'absurde* et la *superposition*. Nous avons souvent employé l'une et l'autre

de ces méthodes, quoique, à l'époque où ces éléments ont été publiés, les auteurs modernes en fissent généralement peu d'usage. La première consiste à faire voir qu'une proposition est vraie par l'absurdité qui s'ensuivrait en la supposant fausse. On a reproché à cette manière de raisonner de ne pas éclairer l'esprit en lui montrant la vérité; mais il nous suffit, pour l'adopter, qu'elle entraîne la conviction, et que souvent elle offre une preuve plus simple et plus abrégée qu'on ne saurait la trouver dans une démonstration directe. D'ailleurs, il y a une foule de vérités en géométrie qui, par leur nature, ne peuvent se prouver autrement; ce sont toutes celles où entre l'idée de l'infini et qui sont en grand nombre. Il faut encore y avoir recours, pour établir que des quantités incommensurables sont entre elles dans des rapports déterminés, à moins qu'on n'ait déja adopté la définition de la proportion par les équimultiples, telle que Euclide l'a donnée au commencement de son cinquième livre; ce qui entraînerait d'autres difficultés.

XXXIV.

Notion des limites d'une étendue.

Quant à la superposition, il nous a paru que de tous les moyens de prouver que deux portions d'étendue sont égales, il n'y en a pas de plus simple que celui qu'offre cette méthode, qui consiste à faire voir, non par une opération mécanique, comme quelques-uns l'ont imaginé, mais par une transposition purement intellectuelle, que chacune

de ces étendues placée sur l'autre, la couvre parfaitement, ou plutôt la pénètre dans toutes ses parties. Mais comme, pour prouver cette mutuelle pénétration, il faut établir la *congruence* de toutes les limites qui terminent ces portions d'étendue, il est nécessaire de prendre ici une idée exacte de ces *limites*. Pour cela, il faut imaginer que deux étendues déterminées de la même espèce, par exemple, deux lignes, deux surfaces, etc. se rapprochent assez pour former, par leur *juxta-position*, un tout continu, sans qu'aucune partie de l'une se confonde avec l'autre; telles seraient deux lignes droites qui ne se toucheraient que par une de leurs extrémités, ou deux surfaces triangulaires qui n'auraient rien de commun, excepté leurs bases. Cela posé, que doit-on entendre en géométrie par les limites d'une étendue déterminée quelconque? C'est *ce que cette étendue peut avoir de commun avec une autre de la même espèce qu'elle, sans cesser d'être tout-à-fait extérieure à celle-ci.* Par là on voit qu'une ligne ne pouvant avoir que son extrémité commune avec une autre, en lui restant extérieure, cette extrémité ou ce point en est la limite : par la même raison, une surface est limitée par une ligne, et un solide l'est par une surface. On voit aussi que le point n'a pas de limites, ou, si l'on veut encore, qu'il se limite lui-même en tout sens, puisqu'il ne peut toucher un autre point, sans se confondre avec lui. Il en est de même d'une ligne considérée quant à sa largeur, et d'une surface par rapport à son épaisseur.

XXXV.

Fausses définitions de la ligne droite.

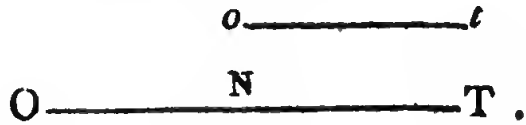
Ce n'est pas sans raison que les géomètres cherchent encore une définition exacte de la ligne droite. Celle d'Archimède, que nous avons adoptée n.° 6, suppose que la propriété d'être le plus court espace entre deux points, est une notion primitive de cette ligne, tandis que, si l'on en avait une autre définition, cette propriété se présenterait peut-être comme une conséquence de la vraie définition. Mais ce soupçon d'inexactitude est peu de chose en comparaison des défauts réels qui se trouvent dans d'autres définitions qu'on a données de cette ligne. Quelques-uns ont dit que c'était celle qui a tous ses points dans la même direction, ce qui, dans le fond, signifie qu'elle a tous ses points en ligne droite, ou bien qu'elle est une ligne droite : d'autres, que c'est la trace d'un point qui se meut toujours dans la même direction ; mais outre le défaut de la définition précédente, celle-ci introduit le mouvement dans les premières notions d'une science qui ne doit s'occuper que de l'étendue. Certains géomètres ont encore cru définir la ligne droite en disant que c'est celle dont une extrémité peut jeter son ombre sur la ligne entière ; mais qui ne voit que la propriété de former une ombre, appartient seulement à une étendue matérielle, et non point à des êtres géométriques, qui n'existent que dans notre entendement? D'ailleurs, n'est-ce pas la rectitude de l'ombre qu'il faudrait déduire de la notion de la ligne droite, plutôt que celle-ci de la première? Enfin

Wolf définit la ligne droite, *celle dont une partie quelconque est semblable au tout.* Mais quelque exacte que soit cette définition, d'après les principes ontologiques de l'auteur, il suffit qu'elle suppose la notion plus métaphysique encore de la *similitude*, pour paraître plus obscure que la chose qu'on veut définir, et pour ne pouvoir être employée dès l'entrée de la géométrie.

XXXVI.

Définition des lignes opposées.

Nous en tenant donc à la définition qu'Archimède a donnée de la ligne droite, cherchons ici ce qu'il faut entendre par lignes opposées. Pour y parvenir, nous devons observer, 1.° que la somme ou la différence de deux lignes droites, ne peut être qu'une ligne droite, d'après l'idée qu'on doit se former (§. IV.) de l'addition et de la soustraction; 2.° qu'une ligne, ainsi que toute quantité continue peut être supposée parvenue de zéro à une valeur déterminée qu'elle a toujours, par des accroissements successifs qui ont commencé à une de ses extrémités, et qui ont fini à l'autre (l'extrémité où commencent ces accroissements sera appelée l'*origine* de la ligne, et celle où ils finissent en sera le *terme*). Ainsi dans *ot*, l'extrémité *o* sera l'origine, et *t* sera le terme; il en sera de même de OT par rapport aux points O et T.



3.° Pour avoir la somme de deux lignes OT, *ot*, il faut poser l'origine *o* de la seconde sur le terme T de la première, et ayant placé le point *t* dans la direction de OT, afin que des deux lignes réunies il en résulte une ligne droite, la somme s'étendra depuis l'origine O de la première ligne jusqu'au terme *t* de la seconde. Or, ce point *t* peut se placer dans la direction de OT de deux manières différentes, ou bien en tombant au-delà de T, par exemple, en M, ou bien entre T et O, par exemple, en N. Dans le premier cas, la somme sera $OM=OT+ot$, et dans le second, elle sera $ON=OT-ot$; ou bien dans ce second cas, l'addition de ces deux lignes se changera en soustraction. La seule différence qu'il y ait entre ces deux cas, c'est que, dans le premier, les termes de chaque ligne, savoir, T et *t*, sont situés dans le même sens par rapport à leurs origines O et *o*, c'est-à-dire, à la droite de ces origines; et dans le second, les termes sont situés en sens contraire relativement à leur origine; savoir, l'un à la droite, l'autre à la gauche de son origine. Si ces deux lignes sont représentées par les deux nombres *a* et *b*, il faudra donc, pour exprimer leur somme, écrire dans le premier cas $a+b$, et dans le second, $a-b$; sans quoi la formule arithmétique n'exprimerait pas juste, dans ce second cas, la condition supposée que ces deux lignes ont leurs termes situés en sens contraires par rapport à leurs origines. Ainsi deux lignes droites, dans lesquelles on supposera cette condition, seront dites, avec raison, *opposées*, parce que leur addition se changera en sous-

traction, ce qui est l'essence de l'opposition entre les quantités. Pareillement deux nombres opposés ne pourront être représentés par deux lignes droites, qu'autant qu'on supposera dans ces lignes que le terme de chacune est situé en sens contraire par rapport à son origine. Voilà pourquoi le calcul faisant trouver dans une courbe, par exemple, dans le cercle, des ordonnées positives et négatives, on les exprime géométriquement par des perpendiculaires élevées en sens contraires sur le même diamètre, parce que ces perpendiculaires sont censées avoir leur origine dans le diamètre, et par conséquent leurs termes en sens contraires de leurs origines.

XXXVII.

Observations sur les lignes parallèles.

Nous avons défini les lignes parallèles en disant, avec Euclide, que *ce sont celles qui, posées sur le même plan, ne se rencontrent jamais, à quelque distance qu'on les prolonge.* Cette définition suppose deux choses: la première, qu'il est possible que deux droites posées sur un plan, soient situées de manière à ne jamais se rencontrer quel que soit leur prolongement; la seconde, que la possibilité de cette situation est tellement évidente par elle-même, qu'on doive l'admettre sans preuve dans une définition. Or, on ne peut disconvenir que l'une et l'autre de ces suppositions n'aient besoin d'être examinées, et que, en les admettant sans des éclaircissements qui les préparent et les justifient, Euclide ne paraisse s'écarter ici de sa rigueur ordinaire.

Pour dissiper ces légères obscurités, qui se répandent sur les premières notions de la géométrie, nous avons cru nécessaire, avant de définir les lignes parallèles, de donner une idée exacte de toutes les situations qu'une droite peut prendre par rapport à une autre posée sur le même plan, et nous avons prouvé, dans le chapitre II, qu'il y a une de ces situations d'après laquelle ces droites ne se rencontrent ni ne peuvent se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge. Avec ce préliminaire indispensable, la définition d'Euclide nous a paru offrir la notion la plus simple et la plus exacte du parallélisme, applicable non-seulement aux lignes droites, mais aux arcs de cercle, aux plans, aux surfaces courbes, etc. et devoir surtout être préférée à celle que donnent la plupart des auteurs élémentaires, en disant que *deux droites sont parallèles, lorsque leurs points correspondants sont à égale distance ;* car ces points correspondants ne pouvant être autre chose que les extrémités des perpendiculaires, tirées entre ces parallèles, leur définition revient à dire que deux lignes sont parallèles, lorsque les perpendiculaires menées entre elles sont toutes égales. Or, cette propriété pouvant et devant se prouver, il n'est pas permis de l'avancer sans preuve dans une définition, comme si c'était une notion primitive de la chose à définir.

Il y aurait bien des remarques à faire encore sur la manière de démontrer les propriétés des lignes parallèles chez plusieurs auteurs d'éléments, toujours plus occupés de tournures faciles que d'idées

exactes. Mais nous nous bornons à dire que, sur cette question, comme dans toutes les autres, la marche d'Euclide nous a paru la plus simple et la plus sûre, et que c'est celle que nous avons suivie. A la vérité, sur la théorie des lignes parallèles, on lui a reproché d'avoir présenté comme axiome une proposition qui semble avoir besoin de preuve, et que Clavius a cru devoir démontrer, si toutefois on peut appeler démonstration une longue suite de raisonnements, dont la clarté frappe moins que celle de la vérité même qu'on cherche à prouver. Mais cette objection nous a paru peu fondée, et nous nous sommes bornés sur ce point à donner à la proposition d'Euclide un énoncé plus simple, tel qu'on peut le voir à l'article 37 de la géométrie, et qui semble la mettre au rang des vérités évidentes par elles-mêmes (*).

XXXVIII.

Diverses manières de définir l'angle rectiligne.

L'ordre des matières nous mène à parler ici de la définition de l'angle rectiligne, qui fut toujours l'écueil et presque le scandale de la géométrie. On sait en effet que, malgré tous les efforts qu'on n'a cessé de faire, pour le définir, les géomètres en cherchent encore une définition exacte. Les uns ont cru qu'il fallait faire entrer dans cette définition

(*) L'axiome dont il est ici question est le onzième du premier livre. Grégori, dans sa traduction d'Euclide, assure que, dans quelques manuscrits, cette proposition est mise au rang des demandes, et non pas des axiomes.

l'idée d'un espace indéfini, renfermé entre les côtés de l'angle; d'autres ont voulu borner cet espace par l'arc décrit du sommet comme centre. Mais la notion de l'angle, ne présentant à l'esprit que la position de deux lignes qui se rencontrent sans se confondre; toute idée de surface est absolument étrangère à l'angle. D'ailleurs, si l'on borne cette surface par un arc, c'est alors un secteur de cercle, et non pas un angle; et si on ne la borne pas, cet espace croissant à proportion que les côtés sont prolongés, il faudra dire aussi que l'angle croît alors; ce qui est démontré absurde. D'autres ont dit que l'angle rectiligne est le *tour* que fait une droite en s'écartant d'une autre, avec laquelle elle a un point commun. Cette définition a été sans doute imaginée pour prouver que l'arc de cercle est la mesure de l'angle; mais outre qu'une pareille idée explique mal dans quel sens l'arc mesure l'angle, cette définition a le défaut d'employer, dès l'entrée de la géométrie, l'idée du mouvement, quoique étrangère à cette science, et de présenter par ce *tour* une notion vague, qui peut désigner, et l'espace parcouru par la ligne qui tourne, et le mouvement qui la fait tourner. D'ailleurs, ce tour n'est pas la notion primitive de l'angle; il n'est qu'une des manières dont on peut concevoir sa formation, et deux lignes immobiles qui se touchent ou se coupent sans se confondre, représentent aussi exactement cette formation que celles qui tournent sur un point commun. D'autres enfin ont dit que l'angle rectiligne est *l'ouverture, l'écart* de deux lignes droites qui

se rencontrent. Mais outre qu'on ne dit pas clairement ce qu'on entend par cette ouverture ou cet écart, que même ce serait par l'angle qu'il faudrait faire juger de la grandeur de l'ouverture, plutôt que de se servir de cette dernière idée pour arriver à la première, on en pourrait conclure encore que le prolongement des côtés faisant croître l'ouverture ou l'écart des lignes, fait croître aussi l'angle qu'elles forment.

Du reste, quand une idée est simple, il est impossible de la définir, parce qu'il est impossible de la décomposer. Alors, pour que l'esprit la conçoive d'une manière exacte, ce qui est l'unique but de la définition, il faut d'abord en écarter avec soin les attributs qu'on lui a faussement supposés; et faisant comprendre, par ce moyen, ce qu'elle n'est pas plutôt que ce qu'elle est, on parvient à donner à l'idée en question toute la rectitude dont elle est susceptible. Or, quoique la notion de l'angle ne soit pas simple, elle en approche tellement qu'après avoir indiqué les fausses manières de le concevoir, il est peut-être inutile de chercher à le définir rigoureusement, et le mot seul fait assez entendre ce qu'il exprime. Si l'on veut aller plus loin, il faudra d'abord fixer le sens précis des termes, et établir clairement dans la définition que la *divergence initiale* de deux lignes forme l'angle; que cette divergence peut varier à l'infini, et qu'elle ne dépend point de la longueur de ces lignes. Nous avons cru atteindre ce but, en fixant dans l'article 21, l'idée qu'on doit se faire de l'*inclinaison* de deux lignes

droites qu'on confond souvent, et mal à propos, avec leur *obliquité*. Nous avons prouvé, dans l'article 22, que le prolongement de ces lignes ne peut faire varier leur inclinaison, et de là s'est ensuivie sans équivoque et sans obscurité la huitième définition du premier livre d'Euclide, ainsi conçue : *L'angle est la mutuelle inclinaison de deux lignes qui se rencontrent sans se confondre*, nous avons cru que cette définition avec les éclaircissements que nous venons de donner était préférable à toute autre, et nous l'avons adoptée dans l'article 23.

XXXIX.

Observations sur la mesure de l'angle.

La manière de mesurer un angle, telle qu'on l'a généralement présentée jusqu'ici, nous a paru mériter encore quelques observations dans un ouvrage où rien ne peut remplacer l'exactitude du raisonnement et l'accord des principes. Car dire, sans autre explication, qu'un angle est mesuré par un arc de cercle décrit de son sommet comme centre, c'est renverser la notion des mesures, d'après laquelle il est hors de doute qu'une quantité qui en mesure une autre doit toujours être de même espèce que la quantité mesurée. Il a donc fallu remonter plus haut, et faire voir qu'à proprement parler, un angle n'est mesuré que par un angle plus petit que lui, que celui-ci l'est par un autre plus petit encore, et ainsi successivement, de même que dans les longueurs une ligne est mesurée par le mètre, le mètre par le décimètre, celui-ci par le centimètre, etc. Mais comme (ainsi que nous l'avons prouvé par la super-

position) le rapport de l'angle mesuré à celui qui sert de mesure, est le même que le rapport qui se trouve entre l'arc intercepté par les côtés du premier, et décrit de son sommet, comme centre, et l'arc d'un égal rayon décrit du sommet du second, on peut dire que cet arc, par son rapport avec l'autre, exprime la valeur de l'angle, ou, ce qui est le même, son rapport avec celui qui sert d'unité. Cet arc n'est donc, à la rigueur, que *l'exposant* de la grandeur de l'angle, et non point sa mesure, ainsi que le logarithme d'un nombre est l'exposant de la valeur de la raison qu'il y a entre ce nombre et l'unité, et non pas la mesure de cette raison. Il nous paraît qu'en comparant ce que nous venons de dire ici sur les arcs de cercle employés comme mesure des angles, avec ce que nous avons dit ailleurs des logarithmes, l'analogie entre les arcs et les logarithmes se présente clairement, et toutes les inductions qui s'ensuivent de ce que nous venons de dire, prouvent que l'éclaircissement apporté dans la manière de concevoir la mesure des angles par les arcs de cercle, était une rectification nécessaire dans la doctrine des éléments. Nous ignorons si quelque autre avant nous a employé cette idée aussi simple que vraie ; mais quoi qu'il en soit de ce point peu important, elle a paru, dès 1781, dans la première édition de ces éléments, et des auteurs recommandables l'ont adoptée depuis.

XL.

Paralogisme ordinaire dans la théorie des lignes proportionnelles : manière de l'éviter.

Toutes les fois qu'il s'agit de faire voir que deux surfaces ou deux solides sont dans le rapport de deux autres quantités, on se borne, dans la plupart des ouvrages modernes, à établir cette analogie pour le cas simple et facile où l'on suppose ces quantités commensurables entre elles (*). Mais il faudrait que la preuve, pour être complète, s'étendît également aux cas où ces quantités seraient supposées incommensurables; et on ne peut y parvenir d'une manière directe, qu'en adoptant la définition qu'Euclide a donnée de la proportion, au commencement de son cinquième livre; ce qui entraînerait quelques autres difficultés qu'on a cru utile d'écarter des éléments. Il a donc fallu que tous les auteurs, qui, sans ce moyen, ont voulu prouver cette analogie dans le cas de l'incommensurabilité, eussent recours à la réduction à l'absurde, ainsi que nous en avons usé aux numéros 101, 221, etc. C'est pour avoir négligé de prouver que deux triangles ou deux parallélogrammes de même hauteur, sont entre eux comme leurs bases, soit commensurables, soit incommensurables, que la plupart des auteurs modernes ont laissé introduire un paralogisme frappant dans la théorie des lignes proportionnelles.

(*) On n'entend parler dans cet endroit que des éléments publiés en France, et avant ceux-ci : ces sortes d'inexactitudes et beaucoup d'autres sont moins communes aujourd'hui (Voyez la note sur le parag. XLII, pag. LXVII).

Pour

Pour établir cette théorie, ils supposent d'abord que de deux lignes concurrentes AH, *a h* (FIG. 44), l'une, par exemple, AH, ayant été partagée en un certain nombre de parties égales, aux points D, E, F, G, l'on mène par ces points des lignes parallèles à H *h*, lesquelles partageront A *h* en un même nombre de parties égales entre elles; et de là ils concluent, avec raison, que l'on a AF : FH :: A*f* : *f h*. Mais, généralisant ensuite cette conséquence, ils en déduisent que, dans tous les cas, deux lignes qui font un angle étant coupées par des parallèles, le sont en parties proportionnelles. Or, cette conclusion s'étend évidemment plus loin que le principe; car n'ayant raisonné jusque-là que dans l'hypothèse où les segments de l'une de ces lignes, comme AF, FH, sont commensurables entre eux, ou bien divisibles en parties égales, AD, DE, EF, etc. on n'en peut rien conclure pour un nombre infini de cas différents où l'on supposerait ces mêmes segments AF, FH, incommensurables l'un à l'autre.

Le seul moyen qu'on ait trouvé pour éviter ce faux raisonnement, a été de supposer la ligne AH divisée en parties infiniment petites, parce que, avec une telle unité de mesure, il n'y a rien d'incommensurable. Mais, outre que c'est là dénaturer la question, que d'ailleurs l'idée de l'infini est hors de sa place à l'entrée de la géométrie, qui ne voit qu'on substitue ici un faux principe à un faux raisonnement; car il n'existe pas de lignes infiniment petites. Pour éviter tous ces inconvénients, il suffit de prouver

d'abord que les triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, soit commensurables, soit incommensurables; et delà s'ensuit, sans restriction, la vérité qu'on veut établir ici, savoir, que si deux lignes concurrentes sont coupées par des parallèles, leurs segments sont proportionnels entre eux, qu'ils soient commensurables ou qu'ils ne le soient pas.

XLI.

Observations sur les figures semblables.

On définit ordinairement les figures semblables (et Euclide les a définies de même) en disant qu'elles ont un même nombre d'angles, les angles respectivement égaux, et les côtés autour de ces angles proportionnels. Cette définition nous a paru renfermer une propriété qu'on ne peut accorder sans preuve, et qui doit s'ensuivre d'une notion primitive et générale de la similitude entre deux figures quelconques, soit solides, soit superficielles. Nous avons cru trouver cette notion en disant que la similitude de deux figures ou de deux portions limitées d'étendue, quelles qu'elles soient, consiste en ce *qu'elles ne diffèrent l'une de l'autre que par leur grandeur seulement.* De cettemanière d'envisager la similitude en général, on a déduit plusieurs conséquences importantes, et surtout la propriété par laquelle on a voulu définir les figures planes semblables; ce qui prouve que cette propriété n'est pas la plus simple, et qu'elle ne doit pas former la définition dont il s'agit. Leibnitz a donné le premier une exacte notion de la similitude, en disant:

Similia sunt quæ non possunt distingui nisi per compræsentiam ; et nous n'avons pris une tournure différente, en appliquant cette idée, aux figures géométriques, que pour éviter les éclaircissements métaphysiques que demanderait le mot *compræsentia*, employé dans la définition de Leibnitz.

XLII.

Réfutation de la méthode des indivisibles.

Dans tout ce que nous avons dit sur la mesure et sur les rapports, tant des surfaces que des solides, nous avons évité avec soin les principes tirés de la méthode des *indivisibles*, dont la plupart des éléments modernes font un continuel usage (*). Cette méthode a pour principe que la ligne est composée de points placés à côté les uns des autres ; la surface de lignes parallèles qui se touchent, et le solide de surfaces toutes semblables et égales, posées les unes sur les autres ; et comme tous ces éléments sont supposés *indivisibles*, la méthode

(*) On ne parle ici que des éléments qui ont paru en France, et il y a peu d'années qu'il eût été difficile de trouver une exception à cet égard parmi ceux qui ont été publiés depuis que l'on a cessé d'étudier Euclide ; c'est-à-dire, depuis environ un siécle. Il en est autrement aujourd'hui, et nous devons au C. Legendre des éléments de géométrie qui réunissent, à tous égards, la rigueur antique avec la clarté moderne. Ceux du C. Lacroix, qui ont paru depuis, tout aussi recommandables par l'exactitude des méthodes, forment la seconde exception qui nous soit connue en ce genre.

fondée sur cette supposition a été appelée la *méthode des indivisibles*. Ce n'est pas sans raison que de tels principes ont toujours été rejetés par des géomètres du premier rang. Qui ne voit, en effet, qu'en admettant des points qui se touchent sans se confondre, des lignes droites, qui, en s'appliquant les unes à côté des autres, forment une surface, des surfaces qui, par leur entassement, font un solide; on suppose que ces points ont une étendue en tout sens, que ces lignes ont une largeur, et ces surfaces une épaisseur. Il faut donc dire alors que ce ne sont plus des points, des lignes, des surfaces, tels qu'on les a considérés dans les premières notions de la géométrie; ou bien que la négation d'étendue, de largeur, de profondeur, peut former un être étendu, large et profond. D'ailleurs, comment admettre, en géométrie, une étendue indivisible, comme si cette étendue n'était pas une quantité, ou bien que toute quantité ne fût pas divisible à l'infini? Ainsi, ou les principes de cette méthode sont faux, ou les expressions en sont si éloignées du langage sévère de la géométrie, qu'on ne saurait l'admettre dans les éléments, quelque avantage qu'elle procure d'ailleurs. Afin d'en mieux sentir les inconvénients, supposons que, d'après cette méthode, on veuille prouver que deux parallélogrammes de même hauteur, l'un droit et l'autre oblique, sont égaux en surface. Pour établir cette vérité, on dira que ces deux parallélogrammes sont composés d'un même nombre d'éléments ou de lignes parallèles à la base; que d'ailleurs toutes

ces lignes sont égales à la base commune, et par conséquent égales entre elles; et qu'ainsi les parallélogrammes sont égaux. Mais qui ne voit qu'il y a un vice essentiel dans ce raisonnement? car, ou bien ces éléments sont sans largeur, et alors ce sont des lignes droites, qui, posées les unes à côté des autres, doivent se confondre en une seule, quelque grand nombre qu'on en suppose (§. XXXIV); ou bien ils ont une largeur, et alors ce sont de petites surfaces. Dans ce cas, il restera à prouver que chaque petite surface du parallélogramme droit est égale à la petite surface du parallélogramme oblique. Or, comme ces surfaces, quelque petites qu'on les suppose, forment elles-mêmes des parallélogrammes, l'un droit et l'autre oblique, il restera à faire voir ce qui était en question; c'est-à-dire, que le parallélogramme droit vaut le parallélogramme oblique de même base et de même hauteur. Sous quelque dénomination que se présentent ces indivisibles dans la doctrine des solides, où ils sont appelés, tantôt *surfaces*, tantôt *tranches infiniment minces*, tantôt *points solides*, ils entraînent la même pétition de principe. Ainsi, quoique facile et expéditive dans plusieurs cas, cette méthode doit être rejetée des éléments de géométrie, où la rigueur doit l'emporter sur toute autre considération; si, malgré ses expressions dures et anti-géométriques, on en voulait faire usage, on ne le pourrait qu'après avoir prouvé que la méthode des indivisibles est toute fondée sur celle d'exhaustion, ainsi que nous l'avons montré pour la théorie de l'infini.

Alors, il faudrait adopter un autre langage, et donner aux démonstrations une tournure bien différente de celle qu'on emploie dans la doctrine des indivisibles. Il faudrait encore, avant d'exposer cette méthode, établir quelques principes sur les propriétés des limites en général, que les commençants entendraient difficilement lorsqu'ils arrivent à ces propositions de géométrie, où il faut opter entre la méthode des indivisibles et celle d'Euclide. C'est pourquoi il n'y a pas à balancer dans le choix. A la vérité, en suivant la marche d'Euclide, les démonstrations deviennent un peu plus difficiles à saisir pour les commençants; mais on n'en peut rien conclure, si ce n'est qu'il faut faire en sorte d'y répandre la clarté qui y manque peut-être. C'est vers ce but que nous avons dirigé nos efforts, surtout dans la théorie des solides, qui est la plus difficile des éléments; et dans laquelle nous avons tâché de réunir l'exactitude des anciennes méthodes avec la facilité des modernes.

XLIII.

Théorie du calcul différentiel.

Il nous reste à parler ici du calcul différentiel dont nous n'avons donné que les premières notions, parce qu'elles remplissent suffisamment l'objet que nous nous sommes proposé dans cet ouvrage. Le chapitre qui sert d'introduction à ce calcul, traite d'un sujet intéressant, et qui n'avait pas encore paru dans les éléments de mathématiques. On a voulu prouver que le calcul différentiel, de quelque

manière qu'on l'envisage, ou comme analyse des infiniment petits, et tel que Leibnitz l'a fait connaître, ou séparé de toute idée de l'infini, ainsi qu'on peut, en effet, le considérer, se fonde directement sur la méthode des *dernières raisons*, qui n'est elle-même qu'une application de la méthode d'*exhaustion* ou des *limites* de l'ancienne géométrie (*).

D'Alembert nous paraît être le premier qui ait voulu ramener le calcul différentiel aux principes de cette méthode; mais les géomètres regrettent qu'il n'ait traité une question si importante que dans celui de ses ouvrages, qui se prêtait le moins aux développements qu'elle exige (**). Cette circonstance nous a privés sans doute de grands perfectionnements dans cette partie de l'analyse (***).

(*) J'ai traité la même question dans deux mémoires imprimés, tomes I et III du recueil de l'Académie des sciences de Toulouse. Ce que j'en ai dit dans ces éléments n'est qu'un extrait de ces mémoires.

(**) Voyez Mélanges de littérature, tom. V, paragraphe XIV.

(***) Le C. Lagrange, dans l'ouvrage intitulé : *Théorie des fonctions analytiques*, imprimé en l'an V, a ramené le calcul différentiel aux principes de l'algèbre ordinaire, sans employer ni l'idée de l'infini ni les méthodes des anciens. Nous n'avons pu profiter ici de cette belle découverte, parce qu'elle suppose des connaissances préliminaires qui ne pouvaient trouver place dans ces éléments.

Forcés de nous occuper de la même question, voici de quelle manière nous l'avons envisagée.

1.° Nous observerons d'abord, pour être exacts, que, quoique la méthode des dernières raisons ne soit qu'une branche de celle des limites, cependant puisque ces deux méthodes sont distinctes dans l'esprit des géomètres, et qu'on ne peut, sans confusion, attribuer à l'une ce qui appartient à l'autre, nous ne parlerons ici que de celle des dernières raisons, parce qu'elle seule nous a guidés dans cette recherche; et les théorèmes I et II du chapitre servant d'introduction au calcul différentiel, l'un et l'autre connus des anciens, sont les deux premiers principes de cette méthode qui nous ont paru se rapporter directement à la question présente, et fournir d'utiles applications.

2.° Parmi les diverses espèces de quantités variables, les unes cessent d'exister par un anéantissement absolu, et celles-là ont pour limite zéro : les autres finissent par une simple transformation qui les change en quantités d'une espèce différente, et les limites de celles-ci sont ces nouvelles quantités avec lesquelles les premières tendent à se confondre. C'est ainsi que dans une courbe RMA (FIG. 146) qui tourne sa concavité vers l'axe des abscisses, les sécantes qui passent par le point M cessent d'exister en devenant la tangente MT, les sous-sécantes en devenant la sous-tangente QT; tandis que les différences RN, MN, de deux coordonnées, ne peuvent cesser d'être, par le rapprochement continuel du point R vers M, qu'en

devenant zéro. Il est essentiel dans cette question de ne pas confondre ces deux cas ; et le théorème III nous fait voir que, dans le second, la dernière raison entre deux suites de quantités variables, assujetties à une loi constante et comparées terme à terme, est celle de leurs limites ; au lieu que, dans le premier cas, c'est-à-dire, lorsque les limites sont zéro (ce qui est précisément l'hypothèse du calcul différentiel), le théorème dont il s'agit ne peut avoir d'application, parce qu'on ne peut concevoir de rapport entre o et o, et que d'ailleurs l'expression insignifiante de o : o n'apprendrait rien sur la valeur de la dernière raison qu'on voudrait lui faire représenter.

3.° Cependant, dans ce premier cas, ou lorsque deux séries décroissantes descendent jusqu'à zéro, avant de chercher l'expression de la dernière raison entre les termes correspondants de ces séries, il fallait s'assurer qu'il en peut exister une, quoique les variables elles-mêmes s'évanouissent ou aboutissent à zéro, et le théorème IV établit cette importante vérité, dont le calcul différentiel n'est qu'une continuelle application.

4.° Dès qu'il peut exister dans l'hypothèse présente, c'est-à-dire, lorsque deux suites de variables décroissent jusqu'à s'évanouir, une dernière raison entre les termes correspondants, sans qu'elle soit la raison de leurs limites, il reste à chercher où elle sera prise, et le théorème V nous fait voir qu'elle doit l'être dans une suite parallèle de raisons entre des quantités dépendantes des premières,

mais qui ne s'évanouissent pas lorsque celles-ci deviennent zéro.

Une fois parvenus à cette vérité, la plus importante de toutes dans cette recherche, on a vu qu'il fallait employer une caractéristique pour désigner la présence de la dernière raison prise hors la suite des variables évanouissantes, et l'on a adopté, pour cet usage, la lettre minuscule *d* parce qu'elle est l'initiale du mot *dernier*. Dès-lors, $dx : dy = a : b$, n'a désigné autre chose pour nous, si ce n'est que les variables x, y sont parvenues à zéro, et que leur dernière raison est celle de $a : b$. Il y aurait, en effet, contradiction manifeste à supposer ici que dx, dy pussent être des quantités réelles, et désigner en même temps la présence de la dernière raison, puisque, dans l'hypothèse actuelle, cette dernière raison ne peut avoir lieu que lorsque les variables x, y, sont zéro.

Dès-lors, il a été facile de nous faire une idée exacte du calcul différentiel, qui n'est autre chose que *la méthode de trouver la dernière raison entre la différence finie de deux ordonnées et celle de leurs abscisses, lorsque ces différences décroissent jusqu'à s'évanouir.* Il nous a été facile également de différencier l'équation d'une courbe, et de déterminer sa tangente, sa sous-tangente, et toutes les lignes qui en dépendent, sans employer d'autre élément de calcul que celui des différences des coordonnées, tantôt finies, tantôt nulles. Nous en avons donné un exemple à l'article 477, et la même méthode pouvant s'appliquer à tous les cas, il nous

a paru suffisamment prouvé que la théorie du calcul différentiel peut être déduite de la méthode des dernières raisons, sans y mêler, en aucune manière, l'idée de l'infini.

Mais puisque Leibnitz, en faisant une heureuse application de cette idée, a trouvé, pour cette branche d'analyse, des règles de calcul simples, d'une facile exécution, d'une certitude incontestable, et que rien ne saurait les remplacer sous ces rapports essentiels; que d'ailleurs tous nos géomètres ont adopté, et sa notation et ses règles, il ne nous restait qu'à nous y conformer nous-mêmes, surtout dans un ouvrage qui doit servir d'introduction à tous les autres, et à faire en sorte de dissiper, par les principes que nous avons posés, les obscurités qu'on a justement reprochées à la métaphysique de sa méthode. La comparaison des procédés de calcul dans l'une et l'autre manière de différencier, c'est-à-dire, d'après la méthode de Leibnitz, et d'après celle des dernières raisons, nous a paru devoir jeter quelque lumière sur ce point important.

Soit donc l'équation la plus simple possible, celle de la parabole ordinaire $yy = px$; qu'on la différencie d'abord (exemple A) d'après la méthode des dernières raisons, en prenant (comme il est dit art. 492 et 478) la majuscule D pour la caractéristique des différences finies, et la minuscule d pour celle des différences nulles, telles qu'on doit les supposer pour arriver à leur dernière raison, d'après l'art. 476. On substituera $y + \mathrm{D}y$ à

la place de y, $x + \mathrm{D}x$ à la place de x, et l'on aura l'équation E ; on soustraira la proposée de celle-ci, il viendra l'équation F, qui est l'équation *aux différences finies*, dans laquelle on ne fait autre chose que transporter, comme il le faut nécessairement, l'origine de la courbe du point A (FIG. 146) au point M, afin d'avoir pour nouvelles variables les différences finies $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$. Cherchant alors les deux suites parallèles de raisons qu'il faut avoir d'après le théorème V pour arriver à la dernière raison, on a l'équation G, dans laquelle deux raisons égales marquent l'origine de ces deux suites : supposant, pour arriver à la dernière raison, que $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$ sont évanouies ou égales à zéro dans cette équation, et se servant alors de la caractéristique d pour indiquer la présence de la dernière raison, on a l'équation finale H.

EXEMPLE A.

Différenciation de l'équation $\mathrm{y\,y} = \mathrm{p\,x}$ *d'après la méthode des dernières raisons.*

E... $y^2 + 2y\,\mathrm{D}y + (\mathrm{D}y)^2 = p\,x + p\,\mathrm{D}x.$

F..... $2y\,\mathrm{D}y + (\mathrm{D}y)^2 = p\,\mathrm{D}x,$

G..... $\mathrm{D}x : \mathrm{D}y = 2y + \mathrm{D}y : p$

H..... $\left\{\begin{matrix} 0 : 0 \\ dx : dy \end{matrix}\right\} = 2y : p.$

EXEMPLE B.

Différenciation de l'équation y y = p x *d'après la méthode de Leibnitz.*

E′ . . . $y^2 + 2y\,dy + (dy)^2 = p\,x + p\,dx$
F′ . . . . . $2y\,dy + (dy)^2 = p\,dx$
G′ . . . . . $dx : dy = 2y + dy : p$
H′ . . . . . $dx : dy = 2y : p.$

Pour différencier (exemple B) la même équation $yy = px$ d'après la méthode de Leibnitz, je dois raisonner et procéder ainsi : Supposons que dy soit la variation infiniment petite de y, et dx celle de x; substituons dans la proposée $y + dy$ à la place de y, et $x + dx$ à la place de x, il vient l'équation E′; soustrayons la proposée de celle-ci, on a l'équation F′; établissant une proportion entre les facteurs des deux membres, il vient G′; enfin dans celle-ci, effaçant dy de la seconde raison, parce que c'est un infiniment petit ajouté à une quantité finie qui ne peut l'augmenter, j'ai l'équation finale H′; sur quoi on fera les observations suivantes :

1.° Cet exemple qui, pour le but que nous nous proposons, ne peut qu'être conforme à tous ceux qu'on pourrait imaginer, démontre la parfaite analogie qui se trouve entre la méthode des infiniment petits et celle des dernières raisons; il prouve clairement que leur marche est semblable, leur origine commune, et que les résultats en sont les mêmes.

2.° Il fait voir en outre que, dans la méthode de Leibnitz, les infiniment petits sont pris dans deux sens opposés, tantôt comme quantités réelles, tantôt comme zéro, et qu'ils doivent être pris ainsi pour que les résultats du calcul soient exacts. On les prend pour des quantités réelles dans les équations préparatoires, quand on substitue $x+dx$ à x, $y+dy$ à y, parce qu'alors dx, dy, correspondent à nos différences finies Dx, Dy, des équations E, F, G, de l'exemple A. On les prend pour zéro dans l'équation finale H′ de l'exemple B qui répond à l'équation H de l'exemple A, parce que, s'il en était autrement, on n'aurait point la condition qui donne la dernière raison, laquelle condition consiste à supposer ces différences nulles; et il est à remarquer que, sans cette double acception des dx, dy, la méthode de Leibnitz serait fausse, ou plutôt elle n'aurait pas existé. En effet, si on eût supposé ces différences partout égales à zéro, soit dans les équations préliminaires, soit dans l'équation finale, on aurait substitué $x+0$ à x, et $y+0$ à y, ce qui eût présenté une transformation illusoire dans l'équation de la courbe, et n'eût point changé réellement l'origine de ses coordonnées, condition cependant essentielle, sans laquelle on n'eût pu avoir pour nouvelles variables les différences de ces mêmes coordonneés, dont on aurait cherché la dernière raison, et on eût manqué par là le but du calcul différentiel.

Si, au contraire, on avait supposé que ces différences étaient partout des quantités réelles, tant

dans les équations préparatoires que dans l'équation finale, on n'eût point rempli la condition qui seule peut amener la dernière raison, et qui consiste à supposer ces différences nulles dans la dernière équation. Ainsi, pour éviter l'un et l'autre de ces inconvénients, on a admis une inconséquence dans les hypothèses. Par ce moyen, on a ouvert, il est vrai, un vaste champ à la dispute, mais on est devenu exact dans les calculs, et c'est le but principal que l'on se proposait. On voit donc que la méthode des dernières raisons, avec les développements nouveaux que nous lui avons donnés, est le tableau fidelle de la méthode de Leibnitz, qu'elle rend un compte si exact de sa marche, de ses principes, de ses procédés, de ses erreurs mêmes (si toutefois on peut les appeler des erreurs), qu'on en peut conclure, avec toute vraisemblance, que c'est la source où ce grand homme a puisé cette belle conception qui a changé la face des sciences mathématiques, et en a fait, pour ainsi dire, une science nouvelle.

3.° Ce qu'on vient d'exposer prouve encore le peu de fondement du reproche qu'on n'a cessé de faire à Leibnitz (et toujours sans preuve), que, dans sa méthode, il corrige une erreur par une erreur contraire; car nous avons vu qu'il n'y a nulle erreur dans ses procédés de calcul, qu'ils sont tous prescrits par la méthode des dernières raisons, et que s'il supprime ses infiniment petits ou ses dx, dy dans certains cas, cette méthode l'y oblige pour obtenir des résultats exacts : le contraire eût été précisément source d'erreur et sujet de reproches

mérités. Il donne, il est vrai, un double sens à ses dx, dy, en leur faisant désigner, tantôt des quantités réelles, tantôt zéro, et ç'a été la source secrète des contradictions qu'on lui a reprochées, et que la métaphysique a vainement cherché à concilier. Il la fallait même cette contradiction, en n'employant qu'une seule caractéristique, sans quoi, Leibnitz n'eût pas été fidelle à la méthode des dernières raisons qui lui servait de guide. A la vérité, il eût pu avertir de cette double signification, l'éviter même en employant deux signes différents pour désigner deux choses différentes. Voilà tout ce qu'on peut lui reprocher avec quelque fondement.

Du reste, dans cette méthode, on se permet encore de *considérer* les infiniment petits comme termes d'une dernière raison entre des quantités évanouissantes, quoiqu'ils ne le soient pas, et que cette dernière raison n'existe pas plus entre dx et dy qu'entre o et o. Mais, d'après l'article 479, cette hypothèse est licite dans le sens qu'on l'emploie ici, et quand on s'en sert pour parvenir aux différences secondes, troisièmes, etc. on n'oublie jamais, en calculant, que ces *quantités feintes* ne sont pas des quantités réelles; et là, comme ailleurs, les procédés du calcul sont toujours exacts, quoique les suppositions soient fausses. Ce que nous avons dit à l'article 479 et suivants, jusqu'à 485, explique suffisamment dans quel sens il faut envisager les quantités feintes, résultant de cette hypothèse, et quelles sont les conséquences qui s'ensuivent de leur admission.

XLIV.

XLIV.

Ce que c'est que l'infini en mathématiques : ses différentes applications.

D'après ce que nous venons de dire, on peut attacher des idées exactes à toutes les expressions où entre la notion de l'infini, soit dans le calcul différentiel, soit ailleurs. Ce ne sont jamais que des limites ou d'une suite de quantités absolues ou d'une suite de raisons. Dans nos Eléments de géométrie nous n'avons jamais dit que le cercle fût un polygone régulier d'une infinité de côtés, parce que, d'après sa définition, cette figure est terminée par une ligne courbe et qu'un polygone l'est toujours par des lignes droites, qui ne sauraient se confondre avec une courbe, quelque petites qu'on les suppose; nous avons dit seulement que le cercle *pouvait être considéré* comme un polygone d'une infinité de côtés. Cette expression signifie que les cercles étant les limites des polygones inscrits ou circonscrits, ils sont entre eux dans le même rapport que ces polygones; et c'est dans ce sens seulement qu'on peut attribuer aux figures courbes, en général, les rapports ou les propriétés qui conviennent à ces polygones.

On a demandé comment on pouvait avoir $\frac{1}{\infty} = 0$, tandis que ce quotient 0, multiplié par ∞, ne peut jamais donner 1 : comment on peut admettre que $\frac{a}{\infty} = 0$, que $\frac{b}{\infty} = 0$, sans accorder en même temps que $a = b$. Certains ont dit qu'il fallait reconnaître dans ces expressions des zéros différents, ce qui est absolument inconcevable ou ma-

nifestement absurde. Mais, d'après nos principes, la réponse à ces questions est aisée : $\frac{1}{\infty}$ n'indique point une division proprement dite, puisque l'infini n'est ni ne peut être supposé un nombre. Cette expression désigne seulement la limite d'une suite de fractions dans lesquelles le numérateur est toujours 1, et le dénominateur croît sans fin ; et par l'équation $\frac{1}{\infty} = 0$, on veut faire entendre que cette limite est 0, comme elle l'est en effet. De même $\frac{a}{\infty}$ exprime la limite d'une suite de fractions qui ont pour numérateur constant le nombre a, et pour dénominateur un nombre toujours croissant : or, la limite d'une telle suite de fractions est encore 0, comme dans le cas précédent, sans que de là on puisse conclure, ou que le nombre a vaut 1, ou qu'il faille admettre des zéros différents dans ces différentes expressions $\frac{a}{\infty} = 0$, $\frac{1}{\infty} = 0$. En un mot, ces manières de s'énoncer indiquent la même limite, savoir zéro, pour deux suites différentes de quantités qui décroissent jusqu'à s'évanouir. Or, ainsi qu'on le voit dans les divers polygones inscrits ou circonscrits, qui tous aboutissent au cercle, ni la même limite ne suppose les mêmes suites de quantités croissantes ou décroissantes, ni la diversité de ces suites n'amène nécessairement une diversité de limites.

Avant de finir ces observations, il nous reste à dire un mot sur les sommes des suites qui décroissent à l'infini, telles, par exemple, que les pro-

gressions géométriques dont nous avons parlé au n.° 262 de l'algèbre. Dans ces suites et dans tous les autres cas où il s'agit de l'infini, ce n'est jamais la somme réelle d'une progression que l'on prétend assigner, puisqu'il faudrait pour cela parvenir à un dernier terme, ce qui renverserait la supposition du progrès à l'infini; mais seulement la limite de cette somme, ou bien le nombre dont elle peut approcher autant que l'on voudra, sans jamais l'égaler. Ainsi quand nous avons dit que la somme de cette progression toujours décroissante $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$.... etc. est $\frac{1}{9}$, il faut entendre seulement que $\frac{1}{9}$ est la limite de cette somme. De même, dans nos Eléments de géométrie, n.° 243, nous avons prouvé que la pyramide triangulaire est le tiers du prisme de même base et de même hauteur, en décomposant cette pyramide et toutes les autres qui viennent de celle-là en prismes triangulaires, et faisant voir que la somme de ces prismes vaut le tiers de celui qui aurait même base et même hauteur que la pyramide donnée. Cependant il est clair que quelque grand que soit le nombre des prismes qu'on tirera de la première pyramide, ils n'égaleront jamais cette pyramide, et que même le nombre des petites pyramides qu'on négligera dans ce calcul, et qui seront l'excès de la pyramide primitive sur la somme des prismes, sera d'autant plus grand qu'on fera plus de décompositions des pyramides en prismes. Ainsi on se tromperait si, en prenant la somme réelle de ces prismes, on croyait avoir la première pyramide qui les a tous produits. Ce n'est donc pas

cette somme qu'on doit chercher, mais seulement sa limite. Or, comme la limite de la somme des prismes qu'on a formés, est évidemment la première pyramide, puisque cette somme ne peut jamais égaler cette pyramide, et qu'elle peut cependant en approcher de plus près que d'une quantité donnée quelconque, il suit de ce que nous avons démontré dans le chapitre qui sert d'introduction au calcul différentiel, que l'expression de la limite de la somme des prismes est aussi l'expression de la première pyramide; et qu'ainsi, puisque $\frac{1}{3}\ b\ h$ exprime la limite de cette somme des prismes, le même nombre exprimera la valeur de la première pyramide, qui, par conséquent, sera le tiers du prisme de même base et de même hauteur exprimé par $b\ h$.

Il nous resterait encore beaucoup d'éclaircissements à donner sur l'infini et sur la manière dont il faut entendre plusieurs autres expressions où l'on en fait usage, soit dans les mathématiques pures, soit dans les mathématiques mixtes; mais outre que ces observations pourraient devenir trop longues, il nous paraît que ce que nous en avons dit est suffisant pour se former des idées exactes de ces diverses expressions, et pour faire voir, ainsi que nous nous l'étions proposé, que le calcul de l'infini n'est que la méthode des dernières raisons ou une application de celle des limites, et que toutes les règles sur lesquelles il est fondé, outre qu'elles sont simples et faciles à employer, sont aussi certaines que celles de l'algèbre ou de l'arithmétique ordinaire.

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

De l'Arithmétique.

SECTION PREMIÈRE.

Des principes de la numération et des différentes méthodes de composition et de résolution sur les nombres entiers.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions et notions préliminaires.

1. *L'ARITHMETIQUE est la science des nombres.* Cette science est ou *spéculative*, ou *pratique*. L'une traite des propriétés des nombres; l'autre expose les méthodes qu'il faut suivre, pour faire sur eux toutes les opérations dont ils sont susceptibles.

2. Par *opération, on entend ici un changement quelconque, qu'on fait subir à des nombres.* Or, ces changements s'exécutent en composant un nombre de plusieurs autres réunis, ou en le décomposant en quelques autres. Ainsi toutes

les méthodes en arithmétique sont, ou méthodes de *composition*, ou méthodes de *décomposition*.

3. Chez divers peuples, on a employé divers signes, surtout les lettres de l'alphabet, combinées de différentes manières, pour exprimer toutes sortes de nombres. Chacun de ces systèmes de numération a ses avantages et ses inconvénients. Celui qu'on suit aujourd'hui dans toute l'Europe nous vient des Arabes : on y emploie les dix *chiffres* (*) ou *caractères* suivants, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, dont nous supposons que chacun connaisse la valeur. Pour désigner par ce moyen un nombre quelconque, on est convenu de deux choses ; la première, que la différente forme de ces caractères désignerait différents assemblages d'unités (excepté 0, qui signifie l'absence de tout nombre) : la deuxième, que leurs différentes places sur la même ligne, désigneraient différentes valeurs de ces unités. Ainsi, 3 désigne trois unités, 6 en désigne six, 7 en désigne sept, etc. ; mais si j'écris ces trois caractères de suite, comme ici 367, les unités du premier, vers la droite, sont censées des unités simples ; celles du second, des unités de dixaine, et celles du troisième, des unités de centaine.

Il faut donc distinguer, dans la numération, une *valeur absolue* des caractères, qui dépend de leur forme et qui détermine d'une façon invariable le nombre d'unités qu'ils expriment, et une *valeur locale* qui dépend du rang qu'ils occupent sur la même ligne et qui fixe la valeur de ces unités. On est convenu que cette dernière valeur croîtrait en *progression décuple* (**), allant de droite à gauche.

(*) Un chiffre en général est un emblème destiné à rappeler certaines idées ou certains objets. Ainsi tout caractère arithmétique ou tout assemblage de caractères arithmétiques, est un chiffre, puisqu'il désigne l'idée d'un nombre ; mais tout chiffre n'est pas un caractère arithmétique. Il ne faut donc pas confondre ces deux expressions *chiffre* et *caractère*.

(**) On entend par *progression décuple*, une suite de nombres

Connaissant donc la valeur absolue des caractères, il ne faut, pour énoncer ou pour écrire exactement une expression numérique quelconque, que faire attention à leur valeur locale, suivant laquelle le premier, vers la droite, exprime des unités simples ; le second, des unités de dixaine ; le troisième, des unités de centaine ; le quatrième, des unités de mille, et ainsi de suite.

EXEMPLE.

6	4	5	7	2	8	9	5	4	3	0	4	5
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Trillions.	Centaines de billions.	Dixaines de billions.	Billions.	Centaines de millions.	Dixaines de millions.	Millions.	Centaines de mille.	Dixaines de mille.	Mille.	Centaines.	Dixaines.	Unités.

4. On peut conclure de ce système de numération, *qu'une unité d'un rang quelconque vaut plus que tout ce qui peut se trouver à la droite de cette unité dans la même expression numérique.* Ainsi, une unité du rang des mille, vaut plus que toutes les centaines, les dixaines et les unités simples qui viennent après ; car celles-ci ne peuvent valoir plus de 999, et l'autre vaut 1000.

5. On appelle nombres *abstraits*, ou nombres *nombrants*, ceux dont l'unité ne désigne aucun objet en particulier, comme 10, 20, 30, ou *dix fois*, *vingt fois*, *trente fois*. On appelle nombres *concrets* ou nombres *nombrés*, ceux

---

dont chacun contient dix fois celui qui le précède immédiatement. Ainsi les nombres 10, 100, 1000, 10000, etc., forment une progression décuple.

dont l'unité désigne des choses déterminées, comme 10 toises, 20 livres, 6 heures.

Quelle que soit l'unité, abstraite ou concrète, on peut la concevoir divisée en plusieurs parties égales, qu'on prendra pour des unités d'une plus petite espèce. On peut donc avoir des expressions numériques qui contiennent une ou plusieurs de ces parties égales de l'unité ; et ces expressions sont appelées *nombres fractionnaires*, ou simplement *fractions*. Par opposition à ces nombres, on appelle *entiers* ceux qui contiennent l'unité, prise un certain nombre de fois sans reste. Ainsi, deux tiers, trois quarts, vingt-cinq trente-sixièmes de l'unité, (ce qui s'écrit ainsi $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{25}{36}$) sont des fractions, et 3, 4, 10, 100, sont des entiers.

Un entier joint à une fraction, comme cinq et trois quarts, dix et un tiers, est appellé *nombre mixte* ; il s'écrit ainsi $5\frac{3}{4}$, $10\frac{1}{3}$.

CHAPITRE II.

De l'Addition.

6. DÉFINITION. L'*addition est une opération par laquelle, de plusieurs nombres donnés, on en compose un seul*, qui devient alors leur *somme*.

DEMANDE. On demande ici que chacun sache prendre la somme des nombres exprimés par un seul caractère ; voici la règle qu'il faut suivre pour ceux qui sont exprimés par plusieurs.

7. REGLE. *Ecrivez les nombres à ajouter, les uns sous les autres, de façon que les unités répondent aux unités, les dixaines aux dixaines, les centaines aux centaines, etc., et si aucune colonne ne monte à 10, prenez seulement la somme de chacune, en allant de droite à gauche, et écrivez-là en dessous.*

Exemple I.

2323
3212
2362
7897

Il faut ajouter ensemble les trois nombres 2323, 3212, 2362. Je les dispose d'abord comme on les voit dans l'exemple I; tirant ensuite une ligne par dessous, je prends les sommes particulières des quatre colonnes; et comme aucune ne monte à 10, je les écris simplement en dessous et vis-à-vis chaque colonne; ce qui fait le nombre 7897.

8. Mais il arrive le plus souvent que la somme d'une colonne monte à 10 et au dessus; de façon que la somme des unités fait des dixaines, celle des dixaines fait des centaines, etc. Alors *n'écrivez sous chaque colonne que les unités de l'espèce qui convient à cette colonne, et gardez les dixaines de cette espèce pour la colonne suivante.*

Exemple II.

5423
8297
3589
17309

La somme des unités (Ex. II.) étant ici 19, elle contient une dixaine et 9 unités; c'est pourquoi j'écris 9 sous la colonne des unités, et je retiens une dixaine pour la colonne suivante: la somme des dixaines étant 20, avec celle que j'y ai transportée de la colonne précédente, elles font juste 2 centaines; c'est pourquoi j'écris o sous la colonne des dixaines, et je retiens deux centaines pour la colonne suivante. Il en est de même pour les autres colonnes.

Il est évident que cette méthode remplit l'objet qu'on se propose dans cette opération; car, un nombre entier ne pouvant contenir que des unités, des dixaines, des centaines, etc., on a évidemment pris la somme de plusieurs de ces nombres, quand on a pris celle de leurs unités, de leurs dixaines, de leurs centaines, etc.

9. Remarque I. Il arrive quelquefois qu'on ne veut qu'indiquer l'addition de plusieurs nombres, sans l'exécuter, et alors on les joint par ce caractère +, qui signifie *plus*. Ainsi, 3+4+6+9, indique que les nombres 3, 4, 6, 9, doivent être ajoutés ensemble.

II. Souvent il faut additionner plusieurs nombres de même nature (*), mais de différente unité, comme seraient diverses sommes de livres, de sols et de deniers; ou bien de francs, de décimes et de centimes; ou bien encore de mètres, de décimètres et de centimètres, etc. *Alors on ajoute ensemble les unités de même dénomination, commençant par les plus petites: on en compose de plus grandes, s'il y a lieu, et de toutes ces sommes réunies, on forme la somme totale.*

Exemple III.

36#	12^s	8^d
160	18	9
124	14	4
322#	5^s	9^d

Ainsi (Ex. III.), ayant a à ajouter ensemble des livres, des sols et des deniers, l'on prend d'abord la somme des deniers, qui étant 21, forme 1^s et 9^d; on écrit 9, et on transporte le sol au rang des sols; prenant ensuite la somme des sols, qui est 45^s, on laisse 5^s dans le rang des sols, et on transporte les livres au rang des livres, dont la somme est 322.

Lorsque dans les nombres complexes, les diverses unités qui les composent, décroissent de valeur en suivant la progression décuple de la numération ordinaire, l'addition se fait comme dans les nombres incomplexes.

(*) 1.° Il est évident qu'on ne peut former une somme de nombres *hétérogènes*, ou de diverse nature, comme seraient par exemple, des francs, des toises et des heures, parce que n'ayant pas d'unité commune, on ne peut les concevoir sous le rapport de tout et de partie.

2.° Les nombres qui renferment des unités de diverses valeurs, quoique de même nature, sont appelés *nombres complexes* ou de *différentes espèces*; ceux où l'unité est toujours de même valeur, sont appelés *incomplexes*. Ainsi, 124 liv. 15 s. 4 d. ou bien 12 fr. 3 déc. 4 cent., ou bien 6 mèt. 4 déc. 3 cent., sont des nombres complexes. 354 toises, ou 126 fr. ou 1786 mèt., sont des nombres incomplexes.

Exemple IV.

864$^{mèt.}$	9$^{déc.}$	7$^{cent.}$
528	8	5
467	9	8
45	4	3
1907	2	3

Dans l'ex. IV où il faut ajouter ensemble des mètres, des décimètres et des centimètres, on prend d'abord la somme de ces derniers, laquelle étant 23, on écrit 3 dans la colonne des centimètres, et on retient 2 qui sont des décimètres, pour les transporter à la colonne suivante; celle-ci donnant 32 ou 3 mètres et 2 décimètres, on écrit ici 2 et l'on retient 3, pour la colonne des mètres, laquelle devient par-là 1907, et la somme totale est 1907$^{mèt.}$ 2$^{déc.}$ 3$^{cent.}$

CHAPITRE III.

De la Soustraction.

10. DÉFINITION. *La soustraction est une opération par laquelle on décompose un nombre donné en deux ou plusieurs autres, dont il est la somme.*

On voit par cette définition, 1.° que pour remplir l'objet qu'on se propose ici, on doit retrancher du nombre donné, un ou plusieurs autres nombres; 2.° que les nombres retranchés, ajoutés à ce qui restera du nombre donné, doivent rétablir celui-ci; 3.° enfin, que cette opération est opposée à celle d'addition.

11. DEMANDE. On demande ici que chacun sache faire la soustraction sur les nombres exprimés par un seul caractère. La règle suivante contient la méthode qu'il faut suivre pour les autres.

12. RÈGLE I. *Écrivez le nombre qui doit être soustrait sous celui dont vous voulez le soustraire, de façon que les unités répondent aux unités, les dixaines aux dixaines, les centaines aux centaines, etc. Et si chaque caractère inférieur vaut moins que le supérieur qui lui répond, prenez*

simplement la différence de leurs valeurs, en allant de droite à gauche, et l'écrivez en dessous

Exemple I.

$$\begin{array}{r} 3546 \\ 1234 \\ \hline 2312 \end{array}$$

On me propose de soustraire 1234 de 3546. Je dispose d'abord ces deux nombres, comme on les voit ci-à-côté ; et, ayant tiré une ligne par dessous, je prends la différence des valeurs des caractères correspondants, en disant : 4 de 6, (on sous-entend *soustrait*) reste 2 ; 3 de 4, reste 1 ; 2 de 5, reste 3 ; 1 de 3, reste 2 ; et la différence totale est 2312.

13. Règle II. *Si le caractère inférieur vaut plus que le supérieur qui lui répond, augmentez la valeur de celui-ci de 10, et par compensation ajoutez une unité au caractère inférieur qui suit immédiatement.*

Exemple II.

$$\begin{array}{r} 92331 \\ 8476 \\ \hline 83855 \end{array}$$

Ayant disposé les deux nombres, comme on le voit (ex. II.) je dis : 6 de 1, cela ne se peut ; c'est pourquoi j'augmente de 10 la valeur du caractère supérieur, ce qui fait 11, et je dis : 6 de 11, reste 5, que j'écris en dessous. Ajoutant par compensation 1 au caractère inférieur suivant, je dis : 8 de 3, cela ne se peut ; j'ajoute donc 10 à 3, ce qui fait 13 ; or, 8 de 13, reste 5. Continuant de même à ajouter 1 au caractère inférieur, toutes les fois que j'ai ajouté 10 au supérieur qui précède, je dis : 5 de 13, reste 8 ; 9 de 12, reste 3 ; 1 de 9, reste 8.

On voit aisément qu'en ajoutant 10 à la valeur du caractère supérieur, et 1 à celle de l'inférieur de la colonne suivante, on augmente également le nombre soustrait et le nombre proposé (3), ce qui fait que leur différence ne change pas.

La même règle doit s'observer quand le nombre proposé contient des zéros, comme dans l'exemple suivant.

Exemple III.

40900
24953
15947

Tout étant arrangé, comme on le voit (ex. III), je dis : 3 de o, cela ne se peut ; ajoutant 10 à o, je dis : 3 de 10, reste 7 ; j'ajoute ensuite une unité au premier caractère qui suit dans le nombre soustrait, ce qui fait 6 ; or, 6 de o, cela ne se peut encore ; j'ajoute donc 10 à o, et je dis alors : 6 de 10, reste 4. Opérant toujours de même, je continue en disant : 10 de 19, reste 9 ; 5 de 10, reste 5 ; 3 de 4, reste 1 ; et la différence cherchée est 15947.

14. S'il faut pratiquer la soustraction sur des nombres de différentes espèces, *on les écrira de façon que les espèces semblables se correspondent, empruntant, s'il le faut, dans le nombre proposé, une unité d'un rang, pour accroître celles du rang inférieur, et rendre la soustraction possible.*

Exemple IV.

110#	13^{s}	9^{d}
89	15	11
20#	17^{s}	10^{d}

Après avoir écrit, comme on le voit (ex. IV), les deniers sous les deniers, les sols sous les sols, les livres sous les livres, on procédera ainsi : 11 de 9, cela ne se peut ; c'est pourquoi j'emprunte 1^{s} de la colonne des sols, et l'ajoutant aux 9^{d} du nombre proposé, je dis : 11 de 21, reste 10 ; passant aux sols, je dis : 15 de 12, cela ne se peut ; prenant donc 1 # dans la colonne des livres, et la changeant en sols pour l'ajouter au reste, je dis : 15 de 32, reste 17. Opérant enfin sur les livres comme ci-dessus, je trouve la différence indiquée dans l'exemple.

Si dans les nombres de différentes espèces, la valeur des unités décroît en progression décuple, *la soustraction se fera suivant la règle générale* (13), *et sans égard à la différence de ces unités.*

Exemple V.

569mèt.	4déc.	5cent.
	5	8
89	8	7

Ainsi, dans l'ex. V, ajoutant 10 au caractère supérieur, et 1 au caractère inférieur qui suit immédiatement, on dira : 8 de 15, reste 7 ; 6 de 14, reste 8 ; 10 de 19, reste 9 ; 8 de 16, reste 8 ; 5 de 5, reste 0 ; et la différence cherchée sera 89mèt. 8déc. 7cent.

On vérifie le résultat de la soustraction en ajoutant la différence au nombre soustrait, puisque cette somme doit rétablir le nombre proposé (10).

15. Si l'on veut soustraire plusieurs nombres, comme 2, 3, 7, d'un nombre donné, par exemple 15, on dira : 2 de 15, reste 13 ; 3 de 13, reste 10 ; 7 de 10, reste 3 ; ou bien on ajoutera ensemble les nombres à soustraire, dont la somme est ici 12, on les retranchera du nombre proposé 15, et la différence sera également 3.

16. Remarques importantes. I. Il arrive souvent dans l'Arithmétique qu'on doit indiquer une soustraction sans la faire ; alors on met ce caractère — qui désigne *moins*, devant le nombre qui doit être soustrait. Ainsi, 24—10, désigne que 10 doit être soustrait de 24, et cela s'énonce ainsi, 24 *moins* 10. Si d'un même nombre on en veut retrancher plusieurs autres, rien n'empêche de les écrire à la suite de celui-là avec le signe—. Ainsi on écrira 24—10—6—3, ou bien 24—19, et la différence sera 5.

II. Un nombre peut représenter telle quantité que, l'ajoutant à un autre nombre, il le diminue, et l'en retranchant, il l'augmente (voy. Disc. prél. n.° X). Ainsi, une dette ajoutée à un bien réel, diminue ce bien ; et réciproquement le bien ajouté à la dette la diminue : le contraire arrive si l'on retranche l'un de l'autre. Il faut donc, pour exprimer arithmétiquement la somme d'un bien de 1000 fr., par exemple, et d'une dette de 100 fr. écrire 1000 fr.—100 fr., sans quoi l'expression ou formule arithmétique ne serait pas conforme à la vérité. Si,

au contraire, je voulais exprimer que de l'état d'un homme qui a 1000 fr. de bien et 100 fr. de dettes, on a retranché les dettes, je devrais ajouter 100 fr. à ce qui exprimait l'état de sa fortune avec les dettes en écrivant 1000 fr. — 100 fr. + 100 fr., de manière que par cette soustraction, son bien réel serait augmenté de 100 fr.

Rien n'empêche d'indiquer à la fois l'addition ou la soustraction de plusieurs nombres de cette espèce. Ainsi, je pourrais écrire 1000 fr. — 100 fr. — 36 fr.

17. DÉFINITION. Deux nombres sont dits *d'espèces opposées*, ou simplement *opposés*, *quand l'addition de l'un diminue l'autre, et que sa soustraction l'augmente.* Pour les distinguer entre eux, ceux d'une même espèce sont appellés *positifs* et précédés du signe + ; et ceux de l'espèce opposée sont appellés *négatifs*, et précédés du signe —. Il est indifférent à laquelle des deux espèces on donne le signe +, ou le signe —, pourvu qu'on garde toujours la même dénomination pour les nombres d'une même espèce.

18. COROLLAIRE. *Pour ajouter ensemble des nombres négatifs et positifs, on les écrira donc à la suite les uns des autres avec leurs signes; mais pour les soustraire, on changera toujours les signes des nombres soustraits.* Ainsi, pour ajouter — 100 à + 1000, j'écrirai 1000 — 100, et pour l'en soustraire j'écrirai 1000 + 100 (16).

Souvent pour indiquer que des nombres doivent être ajoutés ou soustraits de quelqu'autre, on les renferme entre deux crochets, mettant en tête le signe + ou le signe —. Ainsi 15 — (+4 — 6 — 9) m'indique que les nombres + 4 — 6 — 9 doivent être soustraits de 15.

CHAPITRE IV.

De la Multiplication simple.

19. DÉFINITION. *La multiplication est une opération par laquelle, deux nombres étant donnés, on en cherche un troisième qui soit composé de l'un pris autant de fois qu'il est indiqué par l'autre.*

Ainsi, multiplier 6 par 4, c'est chercher un nombre (c'est ici 24) qui doit être composé de 6 pris 4 fois.

On appelle *multiplicande* le nombre composant (c'est ici 6); *multiplicateur*, le nombre qui désigne combien de fois il faut prendre le multiplicande (c'est ici 4): et *produit*, le nombre composé qui résulte de l'opération (c'est ici 24). Le multiplicande et le multiplicateur sont appelés d'un nom commun les *facteurs*, les *produisants*, ou les *racines*.

20. COROLLAIRE. On peut conclure de la définition de cette opération, 1.° que le multiplicateur est toujours un *pur nombre abstrait*, puisqu'il désigne seulement combien de fois il faut prendre le multiplicande.

2.° Que le produit est un nombre de la même espèce que le multiplicande, et qu'il le contient autant de fois que le multiplicateur contient l'unité: ce qui s'exprime en disant *que le produit est au multiplicande, comme le multiplicateur est à l'unité.*

3.° Qu'un nombre quelconque multiplié par l'unité (si toutefois c'est une multiplication proprement dite) ne change point de valeur.

Il est indifférent pour le produit de deux nombres, de multiplier le plus grand par le plus petit, ou le plus petit par le plus grand; car 6 fois 4 ou 4 fois 6 sont la même chose. Cependant dans la pratique, il est plus

commode de prendre pour multiplicateur le nombre qui renferme ou le moins de caractères, ou ceux de moindre valeur.

21. Il n'y a point de règle pour la multiplication des nombres à un seul caractère. La table suivante fait assez connaître ces sortes de produits. Pour s'en servir, il faut voir quelle est la case qui répond à la fois aux deux facteurs pris, l'un dans la première ligne supérieure, l'autre dans la première colonne à gauche, et c'est dans cette case que se trouve le produit cherché. Ainsi 42 est le produit de 6 par 7; 64 est celui de 8 par 8; 63 celui de 9 par 7, etc.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Quelquefois on ne veut qu'indiquer la multiplication de deux nombres, et alors on écrit entre eux ce caractère × , qui signifie *multiplié par*; ou bien on les sépare par un point, ou bien on les enferme chacun entre deux crochets. Ainsi 26 × 17, ou 26. 17, ou (26)(17) sont trois manières de désigner, 26 *multiplié par* 17.

S'il faut opérer sur des nombres exprimés par plusieurs caractères, suivez cette règle.

22. RÈGLE. *Ecrivez le multiplicateur sous le multiplicande, et allant de droite à gauche, multipliez le nombre supérieur par chaque caractère de l'inférieur; placez le premier caractère de chaque produit partiel, vis-à-vis celui du multiplicateur avec lequel vous opérez, et de la somme de ces produits partiels formez le produit total.*

Exemple I.

Multiplicande . . .	324
Multiplicateur . . .	25
Produits partiels.	1620
	648
Produit total . . .	8100

Ayant disposé le multiplicande et le multiplicateur comme on le voit ici, je dis 4 × 5, ou bien 5 fois 4 font 20; j'écris 0 et je retiens 2; 5 fois 2 font 10 et 2 retenus font 12, je pose 2 et je retiens 1 : 5 fois 3 font 15 et un retenu font 16. Passant ensuite au second caractère du multiplicateur, je dis : 2 fois 4 font 8, que j'écris en dessous vis-à-vis le 2 du multiplicateur; 2 fois 2 font 4; 2 fois 3 font 6. Prenant ensuite la somme de ces produits partiels dans le même ordre qu'ils sont écrits, j'ai pour produit total 8100.

23. Si l'un des deux nombres, ou tous les deux à la fois, sont terminés par des zéros, *on abrége l'opération en multipliant seulement les caractères signifiants; mais alors on écrira autant de zéros à la fin du produit, qu'il s'en trouvait de suite à la fin des deux facteurs.*

Exemple II.

Multiplicande . . .	3500
Multiplicateur . . .	450
Produits partiels.	175
	140
Produit total . . .	1575000

Ayant à multiplier 3500 par 450, je me contente de multiplier 35 par 45, et au produit 1575, j'ajoute les trois zéros qui terminent les deux facteurs.

EXEMPLE III.

Multiplicande	99	Multiplicande. . . .	999
Multiplicateur	99	Multiplicateur. . . .	999
Produits particls. . .	891	Produits particls. . .	8991
	891		8991
			8991
Produit total	9801	Produit total	998001

24. REMARQUE. On observera, d'après ces exemples, *que le produit de deux nombres quelconques ne renferme jamais qu'autant de caractères qu'il s'en trouve dans ses facteurs, ou un de moins seulement*; et cela vient de ce que les produits partiels forment autant de colonnes qu'il y a de ces caractères, ou une de moins seulement.

25. S'il faut avoir le produit de plusieurs nombres, comme de 7, 3, 4, 5, on prendra d'abord celui de deux seulement; puis on le multipliera par un troisième nombre, ce nouveau produit par un quatrième, et ainsi de suite. Or, comme ces facteurs, 7, 3, 4, 5, donnent 420, dans quelque ordre qu'on les multiplie, on en conclura de nouveau, *qu'il est indifférent pour un produit de quelle façon on combine ses facteurs.*

26. Outre la multiplication des nombres abstraits dont nous venons de parler, et qui ne sont ni positifs ni négatifs, l'arithmétique offre sans cesse des cas où les deux facteurs se présentent avec les signes + et —, ce qui indique des nombres essentiellement concrets (Disc. prél. n.° XI), comme dans cet exemple + 6 — 4 multiplié par + 2, ce qui s'écrit ainsi + $\overline{6-4}$ × + 2. Mais cette expression ne désigne autre chose, si ce n'est que les nombres + 6 et — 4, doivent d'abord être multipliés par le nombre abstrait 2, c'est-à-dire, pris deux fois tels qu'ils sont; et qu'ensuite ce produit qui sera 12 — 8 doit être

ajouté ou bien à 0, ou bien aux autres nombres avec lesquels il est combiné dans le même calcul. Aussi (21) peut-on écrire pour produit indiqué $0 + 2(6-4)$. (Voyez Disc. prél. n.° XIII et XIV).

On justifiera par un raisonnement semblable les expressions qui présenteront un multiplicateur négatif. On dira, par exemple, que $\overline{6-4} \times -2$ indique qu'il faut d'abord prendre le multiplicande 2 fois, ce qui donne $12-8$, et qu'il faut soustraire ce produit des autres nombres qui peuvent le précéder.

Or, pour ajouter des nombres de différents signes à ceux qui les précédent, il faut les écrire à la suite avec leurs propres signes; au lieu qu'il faut changer ces signes pour les soustraire (18). Il faut donc que $+\overline{6-4} \times +2$ fasse $+12-8$; et que $+\overline{6-4} \times -2$ donne $-12+8$. D'où l'on déduira cette règle: *que le produit doit avoir le signe du multiplicande, lorsque le multiplicateur est positif, et qu'il doit avoir le signe contraire, lorsqu'il est négatif.*

Cette règle s'énonce par cet abrégé $+ \times + = +$, $- \times + = -$, $+ \times - = -$, $- \times - = +$ (*).

27. Remarque. Il arrive souvent dans la pratique de cette opération, que le multiplicande et le multiplicateur, ou l'un des deux seulement, contiennent des unités de différente valeur, quoique de même espèce: comme par exemple, si l'on demandait le prix d'un ouvrage de 124 toises 5 pieds 5 pouces, à 26 fr. 54 centimes la toise. Dans ces sortes de cas, la méthode la plus simple exige, pour avoir le produit, qu'on prenne la moitié, le quart, le dixième, etc., ou telle autre partie aliquote d'un nombre donné, et la règle à suivre pour y parvenir, exigeant la connaissance de la division, nous en parlerons plus bas au chapitre V de la seconde section, sous le titre de multiplication composée.

(*) Ce caractère = signifie *égale*.

CHAPITRE

CHAPITRE V.

De la Division.

28. DÉFINITION. *La division est une opération par laquelle on décompose un nombre en un nombre donné de parties égales, et on détermine la valeur de chacune*; ainsi diviser 24 par 6, c'est décomposer 24 en six parties égales, dont chacune est 4. Dans cet exemple, 24 est le *dividende*, 6 est le *diviseur*, et 4 est le *quotient*.

29. COROLLAIRE. On peut conclure de cette définition, 1.° *que dans toute division le diviseur est un nombre abstrait*, puisqu'il désigne en combien de parties égales il faut décomposer le dividende.

2.° *Que le quotient est de même nature que le dividende*, puisqu'il est une de ses parties.

3.° *Que le dividende contient le quotient autant de fois que le diviseur contient l'unité*; d'où s'ensuit, en considérant ces nombres comme nombres abstraits, 1.° *que le dividende contient le diviseur autant de fois que le quotient contient l'unité*; 2.° *que le quotient multiplié par le diviseur, doit rétablir le dividende.*

4.° Enfin, *que la division décompose les nombres, comme la multiplication les compose*, et qu'ainsi l'une de ces opérations est l'inverse de l'autre.

Pour indiquer la division, on écrit ordinairement le diviseur sous le dividende, et on les sépare par un trait; ainsi, $\frac{24}{6}$ indique que 24 doit être divisé par 6; cependant, dans la pratique de l'opération, il est plus commode de suivre un autre arrangement, tel qu'on le verra dans les exemples ci-dessous.

On suppose que chacun sache faire la division, lorsque le dividende et le diviseur sont des nombres exprimés par un seul caractère.

Voici la règle à suivre dans les autres cas.

PREMIER CAS.

30 *Diviseur à un seul caractère.*

Exemple I.

Dividende... 9468 | 4 . . . . diviseur.
8 | 2367 . . quotient.
14
12
26
24
28
28
0

Supposons qu'il faille diviser 9468 par 4, ou bien en déterminer la quatrième partie. Après avoir disposé ces nombres, comme on le voit ici, j'observe, 1.° *que l'opération doit commencer par la gauche du dividende*, c'est-à-dire, par les unités de la plus forte espèce, parce que, s'il y a un reste de ces unités, on les convertira en unités de l'espèce inférieure, pour en avoir le quart; ce qui ne pourrait se faire en allant de droite à gauche, puisqu'un reste de dixaines, par exemple, ne pourrait former des centaines, ni un reste de centaines ne pourrait former des mille, etc. 2.° Que pour procéder plus commodément, il faut s'arrêter d'abord au premier caractère du dividende total, puisque présentant neuf unités du rang des mille, il doit nécessairement s'en trouver quelqu'une au quotient. Je marque donc ce caractère par un point, pour désigner le premier *dividende partiel*, et je dis:

Le quart de 9 est 2 et un peu plus, j'écris 2 au quotient, je le multiplie par le diviseur 4, et je soustrais le produit 8 de 9, ce qui donne 1 pour reste.

Ce reste est un mille qu'il faut convertir en centaines, pour en avoir le quart, et y ajouter celles du dividende. Tout cela se fait à la fois en abaissant à la droite de 1 le caractère suivant 4 que je marque d'un point, ce qui

indique 14 centaines. Or, le quart de 14 centaines est 3 centaines et plus, j'écris 3 au quotient : multipliant 3 par le diviseur 4, je porte le produit 12 sous 14 pour l'en soustraire, et il me reste 2 centaines, dont je n'ai point encore pris le quart.

Pour trouver ce quart, je change ces deux centaines en 20 dixaines, et j'abaisse à côté celles du dividende, ce qui fait 26 dixaines, dont le quart est 6 dixaines et un peu plus. J'écris 6 au quotient, je multiplie 6 par 4 ; et soustrayant le produit 24 de 26, il reste 2 dixaines dont il faut encore prendre le quart.

Pour l'obtenir, je change ces deux dixaines en 20 unités auxquelles j'ajoute celles du dividende en abaissant 8. Or, 28 divisé par 4 donne 7, que j'écris au quotient ; multipliant 7 par 4, et soustrayant le produit 28 du dernier dividende partiel 28, le reste est 0 : donc le quotient juste de 9468 divisé par 4, est 2367.

Pour m'en assurer de nouveau, je multiplie le quotient 2367 par le diviseur 4, et puisque le produit rétablit le dividende, l'opération est exacte (29).

Exemple II.

Dividende...	2534	7. . . . diviseur.
	21	362 . . quotient.
	43	
	42	
	14	
	14	
	0	

Supposons 2534 à diviser par 7, j'observe qu'ici le quotient ne pourra contenir des unités de mille, puisqu'il en faudrait au moins 7 au dividende pour qu'il y en eût une de cette espèce au quotient. Ainsi, le premier dividende partiel s'étendra jusqu'au second caractère 5 que je marque d'un point, c'est-à-dire, qu'il renfermera 25 centaines ; et le quotient, commençant par des centaines, aura nécessairement trois caractères et n'en pourra avoir davantage.

Or, 25 divisé par 7, donne 3, que j'écris au quotient ;

puis je multiplie 3 par 7, et je soustrais le produit 21 de 25, ce qui donne 4 centaines pour reste. Pour convertir ces centaines en dixaines et en prendre le quart, j'abaisse à côté de 4, le caractère suivant du dividende, lequel est 3 (marquant toujours d'un point les caractères abaissés), et je divise 43 par 7, ce qui donne 6 au quotient ; multipliant 6 par 7 et soustrayant le produit 42 de 43, il vient 1 pour reste ; ce qui indique une dixaine ; enfin, à côté de ce reste abaissant le dernier caractère du dividende, j'ai 14 unités simples à diviser par 7, et il vient 2 sans reste : dono le quotient de 2534 divisé par 7 est 362.

31. Corol. Chaque division particulière ne devant fournir qu'un caractère au quotient, il s'ensuit *que le premier dividende partiel doit contenir autant de caractères qu'il y en a dans le diviseur, ou un de plus seulement.* Ainsi, deux nombres étant proposés, il est aisé de voir de combien de caractères sera composé le quotient qui doit venir en divisant l'un par l'autre.

SECOND CAS.

32 *Diviseur à plusieurs caractères.*

Exemple I.

Dividende 6258	21. . . diviseur.	
42	298 . . quotient.	
205		
189		
168		
168		
0		

Supposons qu'on ait à diviser 6258 par 21, j'observe d'abord que, dans ce cas, le quotient ne peut contenir des mille, puisqu'il en faudrait au moins 21 au dividende, pour qu'il s'en trouvât un au quotient ; c'est pourquoi joignant les mille aux centaines et les marquant d'un point, ce qui fait 62 centaines, j'en cherche d'abord la vingt-unième partie. Or, cette partie est 2

centaines et plus, sans être trois. J'écris donc 2 au quotient, et ce sera toutes les centaines qu'il peut contenir. Je multiplie 21 par 2, et soustrayant le produit 42 de 62, il reste 20 centaines que je change en dixaines, en abaissant à côté le caractère 5 du dividende, et j'ai 205 dixaines à diviser par 21.

Pour opérer plus facilement, je borne la division aux deux premiers caractères de ce dividende et au premier caractère du diviseur, et je dis : 20 divisé par 2 donne 10. Mais j'observe que si j'écrivais ici deux caractères au quotient, j'y mettrais des dixaines de dixaine, c'est-à-dire, des centaines, et alors le caractère précédent n'exprimerait pas assez de centaines ; ce qui ne saurait arriver d'après la méthode que nous avons suivie. *Il est donc impossible que, dans aucune division partielle, il faille écrire à la fois deux caractères, c'est-à-dire, plus de* 9 *au quotient.* Avant d'écrire ici le caractère 9, je l'essaye en multipliant à part 21 par 9 ; et comme le produit 189 peut être soustrait de 205 avec un reste 16, moindre que le diviseur, j'écris 9 au quotient.

Enfin, abaissant le dernier caractère 8 à côté de 16, ce qui donne 168, je change les dixaines en unités, et je les divise par 21. Essayant à part la division des deux premiers caractères de ce dividende partiel par le premier caractère du diviseur, j'ai 16 divisé par 2, qui donne 8 ; lequel nombre multiplié par 21, produit 168 ; or, 168 soustrait du dividende partiel, ne laissant point de reste, j'en conclus que le quotient exact de 6258 divisé par 21, est 298.

33. Corol. Toute la pratique de la division se réduit donc à ces quatre choses : 1.° *A fixer le premier dividende partiel* ; 2.° *à chercher par le premier, ou les deux premiers caractères du dividende et du diviseur, quel est le caractère qu'on doit écrire au quotient* ; 3.° *à multiplier la valeur de ce caractère par le diviseur, pour soustraire le produit du dividende* ; 4.° *à abaisser à côté du reste les*

caractères suivants, s'il y en a, un à un, jusqu'à ce que le dividende total soit épuisé.

Exemple II.

Dividende..11739 | 39 ..diviseur.
117 | 301.. quotient.
39

On me propose de diviser 11739 par 39. J'observe d'abord que le dividende ne contenant pas 39 unités du rang des mille, le quotient ne contiendra point de mille, mais seulement des centaines. Ainsi, le premier dividende partiel s'étendant jusqu'aux centaines, je les marque par un point, et je cherche la trente-neuvième partie de 117 centaines. Essayant donc de la trouver avec les deux premiers caractères du dividende et le premier du diviseur, je dis: le tiers de 11 est 3, que j'éprouve à côté, en le multipliant par 39; et comme le produit 117 peut être soustrait du dividende partiel, j'écris 3 au quotient. N'y ayant point de reste, j'abaisse le caractère suivant 3, et je mets o au quotient, pour désigner qu'il ne doit pas contenir des dixaines. Enfin, abaissant 9 à côté de 3, il me reste 39 unités à diviser par 39, ce qui donne pour quotient 1 sans reste.

34. Remarques. 1.° On voit par ces exemples, que si le caractère abaissé, joint au reste précédent, est plus petit que le diviseur, on doit mettre o au quotient, pour désigner que celui-ci ne contient point d'unités du rang de celles qu'on a abaissées.

2.° Lorsque le dividende et le diviseur sont de purs nombres abstraits, le quotient exprime combien de fois ce dernier est contenu dans l'autre (29). On peut donc, dans la pratique de cette opération, les supposer l'un et l'autre nombres abstraits; et, pour avoir le caractère qui doit entrer dans le quotient, chercher combien de fois un dividende partiel contient le diviseur.

35. S'il se trouve un dernier reste, après avoir abaissé tous les caractères du dividende, *il faut l'écrire à la suite du quotient*; *et, plaçant le diviseur en dessous, on les séparera par un trait*, ce qui formera une fraction ajoutée au premier quotient.

Exemple III.

Dividende 4641 | 34 . . diviseur.
34 | 136 17/34 quot.
124
102
221
204
17

On veut diviser 4641 par 34. Après avoir trouvé le quotient 136, il vient un dernier reste 17, qu'on écrira à la suite sous la forme de cette fraction $\frac{17}{34}$.

36. Scholie. Il y a plusieurs cas où la division se peut faire d'une manière plus abrégée. Nous allons rapporter ici les principaux.

1.° Si le dividende et le diviseur sont terminés par des zéros, retranchez-en le même nombre de chacun, et divisez le reste. Ainsi $\frac{1600}{300}$ se réduit à $\frac{16}{3}$, qui donne 12 au quotient.

2.° Si le diviseur seulement est terminé par des zéros, retranchez-les, et ôtez en même temps un égal nombre de caractères signifiants vers la droite du dividende; par exemple, $\frac{1667}{500}$ se réduit d'abord à $\frac{16}{5}$, qui donne 9 pour quotient et 1 pour reste. J'écris ce reste à la gauche de 67 que j'avois retranché, et de ce nombre divisé par 500, je forme la fraction $\frac{167}{500}$ pour l'ajouter à 9. Ainsi le vrai quotient est ici $9\frac{167}{500}$.

37. Coroll. I. *Donc pour prendre la dixième partie d'un nombre, ou bien pour le diviser par* 10, *il suffit d'en retrancher le dernier caractère, qu'on divisera par* 10, *et de joindre cette fraction à la valeur des autres caractères.* Ainsi $\frac{356}{10}$ donne $35\frac{6}{10}$; $\frac{340}{10}$ donne 34.

Pour prendre la centième partie d'un nombre, ou pour

le diviser par 100, *il suffit d'en retrancher les deux derniers caractères, qu'on divisera par* 100, et ainsi de suite. Donc si ces caractères retranchés sont des zéros, il suffit de les effacer.

S'il faut diviser un nombre par 20, *retranchez d'abord le dernier caractère vers la droite, et prenez la moitié de la valeur des autres.* S'il vient 1 pour reste, écrivez ce reste devant le caractère retranché; divisez par 20, et écrivez cette fraction à la suite. Ainsi dans $\frac{456}{20}$, je retranche le 6, je prends la moitié de 45, qui donne 22 et 1 pour reste, que j'écris devant 6, pour en former la fraction $\frac{16}{20}$. Le vrai quotient est donc ici 22 $\frac{16}{20}$. De même, $\frac{1023}{20}$ donne 15 $\frac{3}{20}$. $\frac{1800}{20}$ donne 9.

On voit par-là comment on réduit un nombre de sols en livres, puisqu'il ne faut pour cela que prendre la vingtième partie de ce nombre, ou le diviser par 20. *En général, on réduit une petite espèce à une plus grande, en divisant le nombre qui exprime la petite par celui qui désigne combien de fois l'unité de cette espèce est contenue dans celle de la grande.* Ainsi, pour réduire un nombre de pieds en toises, on le divisera par 6; pour réduire un nombre de pouces en pieds, on le divisera par 12.

38. SCHOLIE. On remarquera ici, 1.° que tout nombre terminé par 5 est exactement divisible par 5, et qu'il l'est aussi par 10 et par 5, s'il finit par un 0; 2.° qu'un nombre est divisible par 2, si la valeur du dernier caractère est divisible par 2; qu'il l'est par 4, si la valeur des deux derniers caractères est divisible par 4; qu'il l'est par 8, si la valeur des trois derniers caractères est divisible par 8, et ainsi de suite; 3.° qu'un nombre est divisible par 9 et par 3, si la somme des valeurs absolues de ses caractères est divisible par 9; et si cette somme est divisible par 3 seulement, ce nombre sera divisible par 3; et même par 6, lorsque le dernier caractère vers la droite exprimera un nombre pair; 4.° qu'un nombre est divisible par 11, lorsque la somme des valeurs absolues de ses caractères de rang impair, savoir, du 1.er, du 3.me,

du 5.me, etc., vaudra celle des caractères de rang pair ; savoir, du 2.me, du 4.me, du 6.me, etc. (*)

39. Il se présente souvent des cas où l'on propose de diviser des nombres positifs et négatifs les uns par les autres ; mais sur tous ces cas en général, nous observons que le diviseur doit être regardé comme un pur nombre abstrait, sans quoi la question serait absurde, et l'opération impratiquable (29).

Supposons d'abord qu'il faille diviser + 15 par — 5. Faisant abstraction du signe du diviseur, je cherche d'abord la cinquième partie de + 15, qui devant être de même espèce que le dividende (29) sera + 3. Mais comme le signe — qui affecte le diviseur m'indique qu'il faut soustraire ce quotient des nombres qui le précèdent, ou qui peuvent le précéder, je change son signe et j'écris — 3. (Disc. prélim. n.° XV).

On voit par le même raisonnement, que si j'avais eu à diviser — 15 par — 5, j'aurais dû écrire au quotient + 3, parce que la cinquième partie de — 15 est — 3, et que

---

(*) Pour démontrer cette propriété du nombre 11, on peut raisonner ainsi :

Dans chaque dixaine, il manque une unité pour faire un multiple de 11 ; dans chaque centaine, il y a une unité de trop pour avoir un multiple de 11 ; dans chaque mille, il manque une unité pour un multiple de 11, et ainsi alternativement d'excès en défauts : donc dans 5780, par exemple, il y a treize unités en défaut et sept en excès, pour avoir un multiple de 11 ; par conséquent, si au lieu de zéro, j'écrivais pour dernier caractère 6 de cette manière 5786, je ferais une juste compensation, et je serais assuré de trouver dans 5786 un multiple de 11 : et comme ce raisonnement s'applique à tous les cas, je puis dire qu'*un nombre est multiple de* 11, *lorsque la somme des valeurs absolues de ses caractères de rang pair égale celle des caractères de rang impair.* D'où il s'ensuit qu'un nombre étant donné, on peut voir, par la valeur de ses caractères, s'il est multiple de 11, ou combien il s'en faut qu'il ne le soit.

De semblables observations peuvent se faire sur le nombre 9 et se démontrer de même.

devant ici soustraire cette partie de ce qui la précède ou peut la précéder, je dois (18) changer son signe en écrivant + 3.

Au contraire, si le diviseur est précédé du signe +, il faut laisser au quotient le signe du dividende, qu'il doit naturellement avoir, puisque ce quotient est censé ajouté à ce qui le précède ou qui peut le précéder dans la même formule numérique. Ainsi + 15 divisé par + 5, donne + 3; — 15 divisé par + 5, donne — 3.

Tout cela s'exprime par cet abrégé : $\frac{-}{+}$ ou $\frac{+}{-} = -\frac{+}{+}$, ou $\frac{-}{-} = +$.

SECTION II.

Du calcul des Fractions.

CHAPITRE PREMIER.

De la nature et des principales propriétés des fractions.

40. DÉFINITION. *Si l'on conçoit l'unité divisée en plusieurs parties égales, l'expression qui désigne une ou plusieurs de ces parties, s'appelle une* fraction; elle s'écrit en forme de division, de cette manière $\frac{1}{4}$, $\frac{12}{15}$, et on l'énonce ainsi : *un quart, douze quinzièmes.* Le nombre supérieur est appelé *numérateur*, parce qu'il fixe le nombre qu'on prend des parties égales de l'unité; l'inférieur est appelé *dénominateur*, parce qu'il détermine le nom ou l'espèce de ces parties. Si le numérateur est égal au dénominateur, ou plus grand que lui, la fraction vaut l'unité ou plus que l'unité; et c'est alors *une fraction improprement dite.*

41. COROLL. I. *Une fraction exprime toujours le quotient du numérateur divisé par le dénominateur.* Ainsi, la fraction $\frac{3}{4}$ est la même chose que le quotient de 3 divisé par 4 ; car elle indique (40) que l'unité est divisée en quatre parties égales et qu'on en prend trois ; et le quotient de 3 divisé par 4, désigne le quart de trois de ces mêmes unités (28). Or, le quart de trois unités, ou les trois quarts d'une de ces unités, sont la même chose.

42. II. *Une fraction est donc un nombre de même nature que le numérateur* (29).

43. II. *Lorsque deux, ou plusieurs fractions ont même dénominateur, celle qui a un plus grand numérateur est dans la même proportion plus grande* ; parce que renfermant l'une et l'autre les mêmes parties de l'unité, celle qui a un plus grand numérateur, contient en proportion plus de ces parties, Ainsi $\frac{4}{11}$ est double de $\frac{2}{11}$, $\frac{8}{11}$ est octuple de $\frac{1}{11}$.

Mais *si des fractions ont même numérateur, celle qui a un plus grand dénominateur est dans la même proportion plus petite* ; parce que exprimant le même nombre de parties, elle les contient d'autant plus petites, que son dénominateur est plus grand. Ainsi $\frac{2}{5}$ est la moitié de $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$ est triple de $\frac{3}{12}$.

Cette propriété des fractions s'exprime en disant : *que si deux fractions ont même dénominateur, leurs valeurs sont directement comme les numérateurs ; et que si elles ont même numérateur, leurs valeurs sont inversement comme les dénominateurs.*

44. On peut conclure de-là : 1.° *qu'on ne change pas la valeur d'une fraction, en multipliant ou divisant son numérateur et son dénominateur par le même nombre* ; car si l'on multiplie haut et bas par le même nombre, la fraction croît autant par la multiplication du numérateur, qu'elle décroît par celle du dénominateur (43).

Si on divise haut et bas par le même nombre, la fraction diminue autant par le décroissement du numérateur,

qu'elle augmente par celui du dénominateur (43) : donc, dans l'un et l'autre cas, elle ne change point de valeur.

Ainsi $\frac{6}{12}$ vaut autant que $\frac{12}{24}$, où l'on a multiplié haut et bas par 2 ; autant que $\frac{1}{2}$ où l'on a divisé haut et bas par 6.

2.° *Que, sans changer de valeur, tout entier peut être mis sous la forme d'une fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur, ou même tout autre nombre*, pourvu qu'on multiplie cet entier par ce nombre. Ainsi, 36 peut se présenter sous cette forme $\frac{36}{1}$ ou $\frac{36\times4}{4}$ ou $\frac{36\times12}{12}$

45. PROBLÈME I. *Réduire un nombre mixte à une simple fraction, sans changer sa valeur.*

SOL. *Multipliez l'entier par le dénominateur de la fraction qui entre dans le nombre mixte; ajoutez le produit à son numérateur, et faites de cette somme le numérateur de la nouvelle fraction.*

Ainsi, pour réduire $12\frac{3}{4}$ à une seule fraction, je multiplie 12 par 4, ce qui fait 48; j'ajoute 3 au produit, et mettant la somme 51 en fraction sur 4, j'ai $\frac{51}{4}$ à la place de $12\frac{3}{4}$. De même $23\frac{4}{5}$ devient $\frac{119}{5}$, $120\frac{2}{3}$ devient $\frac{362}{3}$.

Par ce procédé, l'entier, sans changer de valeur (44), prend la forme d'une fraction, à laquelle on ajoute celle qui entrait dans le nombre mixte.

46. PROBLÈME II. *Réduire plusieurs fractions au même dénominateur, sans changer leur valeur.*

SOL. *Multipliez le numérateur et le dénominateur de chacune, par le produit des dénominateurs de toutes les autres.* Ainsi, pour réduire $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$ au même dénominateur, j'écris la première ; ainsi, $\frac{3\times15}{4\times15}$; la sesonde ainsi, $\frac{2\times12}{5\times12}$; la troisième ainsi, $\frac{1\times20}{3\times20}$ ce qui se réduit à $\frac{45}{60}$, $\frac{24}{60}$, $\frac{21}{60}$. Il est évident que par-là chacune garde sa première valeur (42), et que cependant elles acquièrent le même dénominateur.

47. REMARQUE. Lorsque les dénominateurs de deux

fractions ont des facteurs communs, la réduction au même dénominateur se fait plus simplement, *en multipliant haut et bas dans chacune, par les facteurs du dénominateur de l'autre, qui ne sont pas communs.* Ainsi, je réduis $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{5}$ au même dénominateur, en les écrivant d'abord de cette façon, $\frac{3}{4\times3}$, $\frac{1}{5\times3}$, pour voir les facteurs communs des deux dénominateurs; puis multipliant haut et bas dans la première par 5, et dans la seconde par 4, ce qui donne $\frac{3\times5}{4\times3\times}$, $\frac{1\times4}{5\times3\times4}$, ou bien $\frac{15}{60}$, $\frac{4}{60}$.

48. LEMME. *Pour trouver le plus grand diviseur commun de deux nombres donnés* a *et* b, *divisez le plus grand; que je suppose* a, *par le plus petit* b; *s'il vient un premier reste* c, *divisez* b *par* c; *s'il vient un second reste* d, *divisez* c *par* d; *s'il vient un troisième reste* e, *divisez* d *par* e; *et enfin, quand vous aurez une division sans reste, le diviseur qui aura servi alors sera le nombre que vous cherchez.*

EX. On demande le plus grand diviseur commun de 384 et de 56. 1.° Je divise 384 par 56, et j'ai $\frac{384}{56}=6$, avec 48 pour reste. 2.° Sans faire attention au quotient, je divise 56 par 48, et j'ai $\frac{56}{48}=1$, et 8 pour reste. 3.° Je divise 48 par 8, et j'ai $\frac{48}{8}=6$, sans reste. D'où je conclus que 8 est le plus grand nombre qui puisse diviser à la fois 384 et 56. (La démonstration de cette méthode sera donnée plus bas).

49. PROBLÈME III. *Réduire une fraction à son expression la plus simple, sans changer sa valeur.*

SOL. *Divisez ses deux termes par leur plus grand diviseur commun, et écrivez les quotients à la place de ces termes.* Il est évident que par-là vous rendrez l'expression plus simple, sans changer la valeur de la fraction proposée (44). Ainsi, $\frac{252}{396}$ se réduit à $\frac{7}{11}$, en divisant haut et bas par 36, qui est le plus grand diviseur commun de 252 et de 396.

CHAPITRE II.

Des quatre opérations de l'Arithmétique sur les fractions.

50. I. L'ADDITION des fractions se fait *en les réduisant au même dénominateur et prenant la somme des numérateurs.* Ainsi, pour ajouter $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{3}$, j'écris d'abord $\frac{21}{84}$, $\frac{12}{84}$, $\frac{56}{84}$, et prenant la somme des numérateurs, j'ai $\frac{46}{84} = 1\frac{11}{42}$.

51. II. La soustraction se fait *en réduisant au même dénominateur, et prenant la différence des numérateurs.* Ainsi, $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ devient $\frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$.

52. III. Pour multiplier une fraction par une autre, *prenez le produit des numérateurs, et mettez-le en fraction sur celui des dénominateurs.* Ainsi, $\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{20}$, ou $\frac{1}{10}$.

53. IV. Pour diviser une fraction par une fraction, *renversez les termes de celle qui doit servir de diviseur, multipliez de suite* (*), *et les produits mis en fraction donneront le quotient.* Ainsi, pour diviser $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{5}$, j'écris $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$, ce qui donne $\frac{15}{8}$, ou $1\frac{7}{8}$, lequel se réduit à $1\frac{1}{4}$. (**)

54. REMARQUES. I. Si on doit multiplier les unes par les autres plusieurs fractions qui ayent les mêmes nombres parmi leurs numérateurs et leurs dénominateurs, *il est plus simple* (44) *d'effacer ces nombres haut et bas, et de multiplier le reste.* Ainsi, $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{5}$ se réduit à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

55. II. *Pour multiplier une fraction par un entier, il suffit de multiplier le numérateur, ou de diviser le dénomi-*

(*) *Multiplier de suite*, c'est multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur.

(**) Voy. Disc. prél. n.° XV.

nateur par cet entier (43). Ainsi, $\frac{2}{11} \times 3$ donne $\frac{2\times 3}{21}$, ou bien $\frac{\frac{2}{21}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{7} = 1\frac{1}{7}$.

56. III. *Pour diviser une fraction par un entier, il suffit de diviser le numérateur, ou de multiplier le dénominateur par cet entier* (43). Ainsi, pour diviser $\frac{6}{7}$ par 3, il est indifférent d'écrire $\frac{2}{7}$, en divisant le numérateur par 3; ou $\frac{6}{21}$, en multipliant le dénominateur par 3.

57. IV. *Pour diviser un entier par une fraction, il faut multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction, et mettre le produit en fraction sur le numérateur.* Ainsi, pour diviser 6 par $\frac{3}{5}$, j'écris $\frac{6\times 5}{3}$, ce qui fait 10.

58. V. *Pour prendre une fraction de fraction, par exemple, les $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{6}$, il faut multiplier les deux fractions l'une par l'autre, ce qui donne ici $\frac{3}{24}$.* Il en est de même pour prendre une ou plusieurs parties d'un entier, par ex., les $\frac{2}{11}$ de 25, je dois multiplier $\frac{2}{11}$ par 25, et je trouve $22\frac{3}{11}$, qui exprimeront les $\frac{2}{11}$ de 25.

CHAPITRE III.

De l'origine et des propriétés des fractions décimales.

59. Nous avons vu (3) que, dans la numération ordinaire, la valeur locale des caractères décroît en progression décuple, en allant de gauche à droite, de façon que le dernier exprime toujours des unités simples. Mais rien n'empêche de concevoir cette progression prolongée au-dessous des unités, de telle sorte que le premier caractère après les unités exprime des dixièmes, le second des centièmes, le troisième des millièmes, et ainsi de suite. Il faudra seulement, pour éviter la confusion, séparer ces fractions des entiers; ce qui pourra se faire par un point ou une virgule. Ainsi, 365, 947 désignera 365 entiers + $\frac{9}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000}$.

60. DÉFINITION. *On appelle fractions* décimales *ces sortes de fractions dont la valeur locale des caractères continue au dessous de l'unité la progression décuple ou décimale de la numération ordinaire.* Ainsi 0, 947 est une fraction décimale sans entiers, où le premier caractère signifiant exprime $\frac{9}{10}$, le second $\frac{4}{100}$, le troisième $\frac{7}{1000}$.

61. COROLL. I. On déduira de-là, 1.° *Que sans changer la valeur d'une fraction décimale, on peut réduire ses caractères à désigner des unités de la plus petite espèce.* Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, 9 qui exprime des dixièmes, 4 des centièmes, 7 des millièmes, peuvent se réduire (44) à $\frac{900}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{7}{1000}$, ou bien à $\frac{947}{1000}$; et comme toute autre suite de décimales se peut réduire de même, on en conclura que *ces sortes de fractions ont toujours pour dénominateur l'unité suivie d'autant de* 0, *qu'il y a de caractères au numérateur.* Voilà pourquoi il est inutile d'écrire le dénominateur décimal, et qu'il reste toujours sous-entendu.

62. Il s'ensuit de-là qu'*on n'augmente point la valeur d'une fraction décimale en mettant des* 0 *à sa suite*, puisqu'il est censé qu'on en ajoute autant au dénominateur qu'au numérateur. Ainsi 0, 4 vaut 0, 40, ou 0, 4000. *D'où l'on voit qu'en ajoutant un nombre convenable de* 0, *on peut réduire toutes sortes de fractions décimales au même dénominateur, sans changer leurs valeurs.*

$$\left.\begin{matrix} 0,4 \\ 6,78 \\ 7,934 \end{matrix}\right\} \text{ se réduisent à } \left\{\begin{matrix} 0,400 \\ 6,780 \\ 7,934 \end{matrix}\right.$$

Par ce moyen, on peut présenter un entier sous la forme d'une fraction décimale, sans changer sa valeur; par exemple, au lieu de 154, on peut écrire 154, 0000.

63. COROLL. II. *Une unité décimale d'un rang quelconque, vaut plus que la somme des valeurs de tous les caractères décimaux qui viennent après.* Ainsi, dans 0, 399 l'unité

l'unité décimale du premier rang, qui est $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1000}{10000}$, vaut plus que la somme du reste, qui est $\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}$, ou $\frac{99}{10000}$.

On conclura de-là, 1.° que la plus grande de deux fractions décimales est celle qui, la première, présente un caractère de plus grande valeur en allant de gauche à droite. Ainsi 0, 4 est plus grande que 0, 39999, continuée à l'infini.

2.° Que si, dans un calcul, on néglige toutes les décimales qui viennent après le premier rang, l'erreur ne peut être de $\frac{1}{10}$; que si on néglige celles qui viennent après le second, elle ne peut être de $\frac{1}{100}$, etc. Cependant, pour rendre cette erreur aussi petite qu'il est possible, en n'employant que tel ou tel nombre de décimales, *il faut augmenter d'une unité le dernier des caractères qui restent, si le premier de ceux qu'on a retranchés surpasse* 5. Par exemple, dans 0, 8270, si je retranche simplement les deux derniers caractères, l'erreur est de $\frac{70}{10000}$ en défaut; mais en ajoutant une unité au dernier de ceux qui restent, de cette manière 0, 83, l'erreur n'est que de $\frac{30}{10000}$ en excès.

CHAPITRE IV.

Des opérations de l'Arithmétique sur les fractions décimales.

64. ADDITION. Pour ajouter ensemble des fractions décimales, *il faut les écrire de façon que les entiers, s'il y en a, ainsi que les unités décimales de même espèce soient en colonne; procéder ensuite comme dans l'addition ordinaire, et placer dans la somme la virgule dans la colonne des virgules.*

EXEMPLE.

54, 24
3, 0589
136, 9

Somme... 194, 1989

La raison de ce procédé est que ces décimales réduites au même dénominateur, deviennent...

54, 2400
3, 0589
136, 9000

Or (50) la somme de ces trois fractions est 194, 1989.

65. SOUSTRACTION. Pour soustraire une fraction décimale d'une autre, *il faut écrire celle qu'on veut soustraire au dessous de l'autre, opérer comme dans la soustraction ordinaire, et conserver les virgules en colonne.*

EXEMPLE.

860, 95
244, 630

616, 320

Ainsi, pour soustraire 244, 630 de 860, 95, j'écris ces nombres comme on les voit ici, et j'ai pour différence 616, 320. (La raison est la même que pour l'addition).

66. MULTIPLICATION. *Multipliez d'abord tout le multiplicande par tout le multiplicateur, comme si c'était des nombres entiers; mettez ensuite autant de derniers caractères du produit en décimales, qu'il y en a en somme dans le multiplicande et dans le multiplicateur.*

EXEMPLE.

Multiplicande... 30, 745
Multiplicateur... 4, 65
Produit..... 142, 96425

En multipliant ici les deux facteurs comme s'ils étaient des nombres entiers, on a le produit 14296425, dont on met les cinq derniers caractères en décimales, parce qu'il y a cinq décimales dans ses facteurs.

Pour démontrer cette règle, il suffit de mettre les deux facteurs sous la forme des fractions ordinaires (ce qui donneroit ici $\frac{3765}{1000} \times \frac{465}{100} = \frac{1749225}{100000} = 142,96425$). Et l'on voit alors que, *dans tous les cas, un produit doit renfermer autant de décimales qu'il y en a dans ses facteurs.*

67. COROLLAIRE. Puisque dans toute division le dividende est le produit du quotient multiplié par le diviseur, *il doit contenir autant de décimales qu'il y en a dans le diviseur et dans le quotient.*

68. REMARQUE. Quand les premiers caractères d'une fraction décimale sont des o, il peut arriver qu'après avoir multiplié, comme il est dit ci-dessus, le produit renferme moins de caractères qu'il n'y a de décimales dans ses facteurs. Cela se trouve, par exemple, dans o, 04×00003, dont le produit 12, pris à la façon des nombres ordinaires, contient deux caractères, tandis que les facteurs contiennent cinq décimales. Alors *on doit écrire à la gauche du produit le nombre de zéros qu'il faut, pour qu'il renferme autant de caractères décimaux qu'il s'en trouve dans ses facteurs.* Ainsi, o, 04 × o, 003 = o, 00012. De même o, 0016 × o, 014 = o, 0000224.

69. DIVISION. Pour diviser une fraction décimale par une autre. 1.° *On commence par ajouter, s'il le faut, ou supposer ajoutés à la suite du dividende assez de zéros pour qu'il ait au moins autant de décimales que le diviseur.* 2.° *On divise ensuite l'un par l'autre, sans faire attention aux décimales.* 3.° *Dans le quotient ainsi trouvé, on sépare autant de décimales qu'il y en a de plus dans le dividende que dans le diviseur; de sorte que, s'il y en a le même nombre dans les deux, le quotient est un entier.*

EXEMPLE.

Dividende. . . . . 4, 1436 { 1, 2.. diviseur. / 3, 453 quotient.

Dans cet exemple, le quotient a trois décimales, parce qu'il y en a quatre dans le dividende, et une dans le diviseur.

La raison de ce procédé est que le dividende, devant contenir autant de décimales qu'il s'en trouve en somme dans le diviseur et le quotient (67), il faut que celui-ci renferme l'excès de celles du dividende sur celles du diviseur.

70. PROBLÈME. *Etant donné deux nombres qui n'ont pas de quotient exact, trouver un quotient qui ne diffère pas du véritable, d'une unité décimale aussi petite qu'on voudra, par exemple de* $\frac{1}{\ldots}$.

SOL. Opérez à l'ordinaire jusqu'à ce que vous ayez le premier reste : ajoutez un zéro à ce reste, et divisant encore, mettez le quotient qui viendra en décimale à la suite du quotient trouvé; continuez ainsi jusqu'à ce que vous ayez le nombre de décimales demandé.

EXEMPLE.

3232 | 13	
26 | 248, 61538.	
63	
52	
112	
104	
80	
78	
20	
13	
70	
65	
50	
39	
110	
104	
6	

Il est clair que dans cet exemple, le quotient trouvé ne diffère pas du véritable de $\frac{1}{\ldots}$, puisque (63) toutes les décimales qu'on pourroit mettre à la suite, ne pourroient valoir $\frac{1}{\ldots}$.

71. COROLL. *On peut donc réduire une fraction ordinaire en fraction décimale, en la considérant comme un reste de division, et opérant comme ci-dessus.* Quand cette réduction ne peut point se faire exactement, on le connaîtra en voyant revenir les mêmes restes qui se seront déja présentés dans quelque division précédente, et dès-lors les mêmes séries de caractères, au quotient.

CHAPITRE V.

Des opérations de l'Arithmétique sur les nombres complexes.

Ce que nous avons dit plus haut (9 et 14) nous dispense de parler ici de l'addition et de la soustraction de ces nombres ; il nous reste à indiquer les méthodes les plus simples pour les multiplier et les diviser, et ces sortes d'opérations seront appelées *multiplications et divisions composées.*

Multiplication composée.

EXEMPLE I.

72 357 t. 4 pi. 9 po.
à. . . 27# 15$ 3^ la toise.

b. .	9639#			
c. .	178#	10$		
d. .	89#	5$		
e. .	4#	9$	3^	
f. .	18#	10$	2^	
g. .	3#	9$	4 $\frac{1}{2}$ ^	
Valeur totale. . *h.* .	9933#	3$	9 $\frac{1}{2}$ ^	

On demande ici (exemple I.) le prix de 357 toises 4 pieds 9 pouces d'ouvrage, à 27# 15$ 3^ la toise.

Il est clair que, pour le connaître, il faut, 1.° multiplier le prix de la toise par 357, qui exprime le nombre des toises (*) ; 2.° qu'à ce produit il faut ajouter la valeur des 4 pi. 9 po. qu'on cherchera à part, et par voie de division, parce que ce n'est là qu'une partie de la toise.

Or, d'après les règles ci-dessus, 27#, multipliées par 357, donnent 9639#, que j'écris sous les nombres proposés en *b*.

(*) Ce multiplicateur est considéré ici comme un pur nombre abstrait, sans quoi l'opération serait impossible (20).

Pour avoir le prix de 357 t. à 15^{s} la toise, je raisonne ainsi : si c'était à 20^{s}, les 357 t. vaudraient 357$^{\#}$. Or, 15^{s} sont la moitié et le quart de 20^{s}, donc le prix à 15^{s} sera la moitié et le quart de 357$^{\#}$. J'en prends d'abord la moitié pour les 10^{s}, ce qui donne le nombre *c*; puis le quart ou la moitié de la moitié pour 5^{s}, formant le nombre *d*.

On raisonnera de même pour avoir le prix de 357 t. à 3^{a} la toise; on dira : si c'était à 12^{a} ou 1^{s}, ce prix serait 357^{s}; mais 3^{a} sont le quart d'un sol : le prix sera donc le quart de 357^{s}, ou bien 89^{s} 3^{a}, valeur indiquée par *e*.

Pour trouver le prix des 4 pieds, je dis: 4 pieds sont les deux tiers de la toise; donc ils valent les deux tiers de 27$^{\#}$ 15^{s} 3^{a}. Or, le tiers étant 9$^{\#}$ 5^{s} 1^{a}, les deux tiers seront 18$^{\#}$ 10^{s} 2^{a}, valeur exprimée par le nombre *f*.

Enfin, le pied valant 4$^{\#}$ 12^{s} 6^{a}, c'est-à-dire, le sixième de la toise, les trois pouces, qui sont le quart du pied, vaudront le quart de 4$^{\#}$ 12^{s} 6^{a}, qui est 1$^{\#}$ 3^{s} 1 $\frac{1}{2}$^{a}, et les 9 pouces vaudront trois fois ce nombre, ou bien 3$^{\#}$ 9^{s} 4 $\frac{1}{2}$^{a}, valeur indiquée par le nombre *g*.

Additionnant ensemble toutes ces valeurs partielles, on a pour valeur totale le nombre *h*.

EXEMPLE II.

567 mèt. 34 cent.
à . . . 23 fr. 12 c.

113468
56734
170202
113468

1316, 9008

On demande (ex. II.) le prix de 567 mètres et 34 centimètres d'un ouvrage à 23 francs 12 centimes le mètre.

D'après la nature de ces valeurs, j'ai ici à multiplier un entier, joint à une fraction décimale par un autre entier réuni à une autre décimale; et opérant sur ces nombres, d'après la règle donnée plus haut (66), le produit est 1316 fr. $\frac{9008}{10000}$; et comme, dans les monnaies républicaines, la division du franc ne descend pas plus bas que les cen-

times, je supprime les deux derniers caractères décimaux du produit, et j'ai pour la valeur cherchée 13116 fr. 90 c.

EXEMPLE III.

942 mèt. 34 cent.
à . . . 0 fr. 73 cent.

282702
659638

B. . . 687,9082
C. . . 687 fr. 90 c.

On demande le prix de 942 mètres 34 centimètres, à 73 centimes le mètre.

Multipliant les deux nombres l'un par l'autre, d'après les règles données pour le calcul des fractions décimales, j'ai le produit B; et en retranchant les deux derniers caractères, pour s'arrêter aux centimes, il reste le nombre C.

Division composée.

EXEMPLE I.

Dividende . 135ᵗ 18ˢ 10ᵈ | 12. . . . . diviseur.
12 | 11ᵗ 6ˢ 6 10/12 ᵈ quotient.
15
12
Reste. . . 3ᵗ

A

dividende. 78ˢ | 12 diviseur.
72 | 6ˢ quotient.
Reste. . 6ˢ

B.

Dividende. 82ᵈ | 12 diviseur.
72 | 6 10/12 ᵈ quotient.
Reste. . 10

73. Lorsque le diviseur ne contient que les mêmes unités, et que le dividende en renferme de diverses espèces, *il faut diviser successivement ces différentes espèces, en commençant par la plus haute, et changeant les restes, s'il y en a, en unités de l'espèce inférieure.*

Ainsi, dans l'exemple précédent, on divisera d'abord 135# par 12, et on trouvera 11# pour quotient avec 3# pour reste. Convertissant ce reste en sols et les ajoutant aux 18^{s} du dividende, on aura (case A) 78^{s} à diviser par 12; ce qui donnera 6^{s} pour quotient et 6^{s} pour reste. Changeant de nouveau ce reste de sols en deniers, et les ajoutant à ceux qu'on avait déja, on trouvera (case B) 82^{d} à diviser par 12, et il viendra pour quotient 6^{d} et $\frac{10}{12}$ de denier. Ainsi, dans cet exemple, le quotient exact sera 11# 6^{s} 6$\frac{10}{12}^{d}$.

74. Lorsque le dividende et le diviseur contiennent chacun des nombres de différentes espèces, *on doit réduire l'un et l'autre à la plus petite espèce, et diviser à l'ordinaire.*

Exemple II.

Dividende . . . . 386# 6^{s} 8^{d} $\left\{\begin{array}{l}\frac{24^{to.}\ 4^{pi.}\ 3^{po.}}{15^{\#}\ 12^{s}\ 8^{d}}\end{array}\right.$ . . . diviseur. . . . quotient.

Vingt-quatre toises quatre pieds trois pouces d'un ouvrage ayant couté 386# 6^{s} 8^{d}, on demande à combien revient la toise.

La méthode la plus simple est de réduire le dividende en deniers, ce qui donnera 92720^{d}; le diviseur en pouces, qui feront 1779 pouces, et de diviser par la méthode ordinaire, qui fera trouver 52^{d} et $\frac{212}{1779}$, ou bien 4^{s} 4$\frac{212}{1779}^{d}$ pour la valeur de chaque pouce.

Multipliant cette valeur par 12, afin de déterminer celle du pied, on aura 2# 12^{s} 1 $\frac{765}{1779}^{d}$ pour prix du pied. Multipliant enfin cette dernière valeur par 6 pour avoir le prix de la toise, il viendra 15# 12^{s} 8 $\frac{1032}{1779}^{d}$ pour le nombre cherché.

Cette opération se vérifie en multipliant la valeur trouvée de la toise par le nombre proposé 24 t. 4 pi. 3 po. dont le produit doit égaler 386 lt 6 s 8 d.

EXEMPLE III.

	fr.	cent.	mèt.	cent.	
Dividende . .	33	62	24	03	. . . diviseur.
	2403		1 fr.	88.c	. . quotient.
	9590				
	7209				
	23810				
	21627				
Reste . . .	2183				

Vingt-quatre mètres et trois centimètres d'un ouvrage, ayant coûté 33 francs 62 centimes, on demande quelle sera la valeur du mètre.

Pour la trouver, il faut diviser (ex. III) 33 fr. 62 c. par 24 mèt. 03 cent.; et ajoutant assez de zéros au dividende ou aux restes du dividende, pour avoir deux décimales au quotient, il viendra, d'après la règle ci-dessus, 1 fr. 39 c. pour la valeur cherchée.

On s'assure que cette valeur du mètre est exacte, en la multipliant par le nombre des mètres; savoir, par 24 mèt. 03 cent.; et ajoutant le dernier reste 2183 à ce produit, on retrouve le prix total 33 fr. 62 cent.

SECTION III.

Des nombres abstraits considérés par rapport à leurs facteurs.

CHAPITRE PREMIER.

Des nombres simples et des nombres composés.

PARMI les nombres abstraits dont nous parlons ici, certains peuvent résulter de la multiplication de quelques facteurs, et d'autres ne le peuvent pas. Ainsi, 4 peut résulter de 2. 2; 6 de 2. 3; 30 de 2. 3. 5; etc. Mais il n'y a point de facteurs dont la multiplication réciproque puisse donner les nombres 3, 7, 11, etc. (Si on en excepte ces nombres eux-mêmes multipliés par l'unité qu'on ne doit pas mettre au rang des facteurs).

75. DÉFINITIONS. I. On appelle *nombre simple* ou *nombre premier*, celui qui ne peut résulter de la multiplication de quelques autres. Voici tous ceux qui sont au dessous de 100.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

76. II. On appelle nombre *composé* tout nombre qui peut résulter de la multiplication de quelques nombres simples, comme 10 qui résulte de 2. 5; 12 qui résulte de 2. 2. 3; 16 qui résulte de 2. 2. 2. 2.

On dit encore de deux nombres qu'ils sont *premiers entre eux*, lorsqu'ils n'ont aucun facteur commun; ce qu'on exprime aussi en disant qu'ils n'ont aucune *mesure commune*. Ainsi, 8 et 15 sont premiers entre eux, de même que 10 et 21, 6 et 35, etc.

77. III. Un nombre est dit *multiple* d'un autre, quand il le contient un nombre de fois juste. Ainsi, 12 est multiple de 2, de 3, de 4 et de 6. Les nombres qui sont contenus un certain nombre de fois juste dans les autres, s'appellent leurs *sous-multiples* ou leurs *parties aliquotes* ou leurs *mesures*.

78. *Tout nombre composé résulte de la multiplication de quelques nombres simples.* Ainsi, 24 résulte de 2. 2. 2. 3; 35 résulte de 5. 7. De sorte que si j'ai à désigner la multiplication de 24 par 35, je puis écrire (2. 2. 2. 3.) (5. 7.) et dans quelque ordre que je dispose ces facteurs, le produit sera toujours celui de 24 par 35.

79. *Un produit doit contenir tous les nombres premiers qui sont dans ses facteurs, et n'en peut contenir d'autres.* Ainsi, puisque 10 résulte des seuls nombres premiers 2 et 5, et que 21 résulte seulement de 3 et de 7, le produit de 10 par 21, qui est 210, contiendra les nombres premiers 2, 3, 5, 7, et ne contiendra que ceux-là.

On peut se convaincre de cette vérité en écrivant à la place des produisants 10 et 21, leurs facteurs simples 2. 5. 3. 7. Or, quelque facteur simple qu'on ajoute, qu'on retranche ou qu'on change parmi ceux-là, on n'aura jamais le produit de 10 par 21: donc ce produit a pour facteurs simples les nombres premiers 2, 3, 5, 7, et n'en a point d'autres.

80. *Si un nombre mesure un autre nombre, il mesurera également tous les multiples de celui-ci.* Ainsi, 3 mesure de 12, doit mesurer 36, 48, 72, qui sont des multiples de 12.

81. *Quand un nombre est la mesure commune de deux ou de plusieurs nombres, il l'est aussi de leur somme et de leur différence.* Ainsi, 3 étant la mesure commune de 18 et de 12 (puisqu'il est contenu 6 fois dans le premier, et 4 fois dans le second), le sera aussi de leur somme 18 + 12, qui le contiendra dix fois; et de leur différence 18 — 12, qui le contiendra deux fois.

82. Quand une fraction est réduite à l'expression la plus simple, le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux ; puisqu'il ne leur reste aucun diviseur commun. D'où l'on conclura, *que si une pareille fraction est ajoutée à un entier, et qu'on réduise le tout en forme de fraction, le numérateur et le dénominateur seront encore premiers entre eux.*

Par exemple, si j'ai le nombre mixte $12\frac{3}{5}$ dans lequel 3 et 5 sont premiers entre eux ; en réduisant à une seule fraction (45), j'aurai $\frac{63}{5}$. Or, je dis que 63 et 5 seront premiers entre eux ; car s'ils ne l'étaient pas, le diviseur commun de 63 et de 5, diviserait aussi 60 multiple de 5 (80) ; il diviserait donc 3, différence de 60 et de 63 (81) ; et par conséquent 3 et 5 auraient un diviseur commun, et la fraction $\frac{3}{5}$ ne serait pas réduite à l'expression la plus simple, ce qui est contre la supposition.

Tout nombre est divisible sans reste par chacun de ceux qui ont été ses facteurs. Le problème suivant donne la méthode de trouver tous ces diviseurs, tant simples que composés.

83. PROBLÈME. *Trouver tous les diviseurs exacts d'un nombre.*

SOL. *Cherchez d'abord tous les nombres premiers qui divisent exactement le nombre proposé, en commençant par les plus petits ; multipliez ensuite tous ces diviseurs simples, tant par eux-mêmes que par les diviseurs composés déjà trouvés ; et ce sera-là tous les diviseurs exacts du nombre proposé.*

EXEMPLE I.

210	2,
105	3, 6,
35	5, 10, 15, 30,
7	7, 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210.
1	

On demande ici tous les diviseurs exacts du nombre 210. Pour opérer sans confusion, je tire une ligne de

haut en bas ; j'écris ce nombre d'un côté de la ligne et son plus petit diviseur simple, savoir 2, de l'autre côté et vis-à-vis. Je divise ensuite 210 par 2, et j'écris le quotient 105 sous le dividende. Je vois ensuite que 105 ne peut plus être divisé par 2, mais par 3 ; j'écris donc ce nouveau diviseur à côté, et le quotient 35 au dessous. Essayant de nouveau sur 35 les plus petits diviseurs simples, je vois que ce nombre est divisible par 5, que j'écris vis-à-vis, et le quotient 7 au dessous de 35. Voyant enfin que 7 n'a d'autre diviseur simple que lui-même, je l'écris au rang des diviseurs, de façon que 2, 3, 5, 7, sont les seuls diviseurs simples du nombre proposé.

Pour trouver les diviseurs composés, je commence à multiplier 2 par 3, ce qui donne 6, que j'écris vis-à-vis 3. Je multiplie ensuite 2, 3, 6 par 5, et j'écris vis-à-vis les produits 10, 15, 30. Enfin je multiplie par 7 tous les nombres qui sont au dessus, j'écris à côté de 7 les produits 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210, et ce sont-là tous les diviseurs exacts du nombre 210.

EXEMPLE II.

360	2,
180	2, 4,
90	2, 8,
45	3, 6, 12, 24,
15	3, 9, 18, 36, 72,
5	5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.
1	

Dans ce second exemple on trouve, par la même méthode, tous les diviseurs exacts de 360 ; et en les comparant avec ceux du nombre 210 (ex. I.), on voit que le plus grand facteur ou diviseur commun de ces deux nombres est 30. Or, 30 est le produit des facteurs simples 2, 3, 5, communs à ces deux nombres ; d'où l'on conclura *que l'on a le plus grand diviseur commun de deux nombres, si l'on*

prend le produit des facteurs simples communs à ces nombres (*).

CHAPITRE II.

Des puissances et de leurs principales propriétés.

84. QUAND un nombre résulte de la multiplication du même nombre, pris plusieurs fois comme facteur, il est une *puissance* de ce facteur, qui, par cette raison, est appelé *racine*, relativement à ce produit ou à cette puissance (**).

Ainsi, puisque 4 résulte de 2×2, 4 sera la *seconde puissance*, ou *le quarré* de 2, et 2 en sera *la racine quarrée*; puisque $8 = 2.2.2$, 8 sera la troisième puissance, ou le *cube* de 2, et 2 sera sa *racine cubique*; de même 16 sera la *quatrième puissance* de 2, 32 en sera la *cinquième*, et ainsi de suite. Au lieu d'écrire la racine plusieurs fois de suite, pour désigner une puissance, on l'enferme entre deux crochets, et on met à côté, et un peu au dessus, un chiffre qui désigne combien de fois elle entre comme facteur dans la puissance. Ainsi $(2)^2$ désigne 2. 2, ou la seconde puissance de 2; $(2)^3$ désigne 2. 2. 2, ou la troisième puisssance de 2; $(2)^4$ désigne la quatrième. Ce chiffre écrit au dessus s'appelle *l'exposant* de la puissance.

La table suivante présente les quarrés et les cubes des dix premiers nombres de la série naturelle, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

(*) Si le même nombre simple est plusieurs fois facteur commun des deux nombres proposés, il entrera autant de fois comme facteur dans leur plus grand diviseur commun. Ainsi, puisque 24 résulte de 2. 2. 2. 3, et que 84 résulte de 2. 2. 3. 7, le plus grand commun diviseur de 24 et de 84, sera 2. 2. 3, ou 12.

(**) La définition exacte des puissances sera donnée plus bas. (Voy. Algèbre 124).

Quarrés. 1 : 4 : 9 : 16 : 25 : 36 : 49 : 64 : 81 : 100.
Cubes... 1 : 8 : 27 : 64 : 125 : 216 : 343 : 512 : 729 : 1000.

85. On observera comme une propriété remarquable de ces nombres, 1.° *que si dans la suite des quarrés on soustrait de chacun celui qui le précède vers la gauche, on forme la suite des nombres impairs* 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, *etc., qui croissent toujours de* 2.

2.° Que si dans la suite des cubes on soustrait de chacun celui qui le précède, il vient la suite 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, qui paraît d'abord irrégulière. *Mais si de chaque terme de cette suite on soustrait encore celui qui le précède vers la gauche, on a celle-ci* 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, *dans laquelle chaque terme augmente régulièrement de* 6.

86. Tout nombre pair se peut diviser exactement une ou plusieurs fois par 2, jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient impair (*). Ainsi, 30 ne peut être divisé qu'une fois par 2, parce que le premier quotient est 15; 28 peut l'être deux fois, parce que le premier quotient est 14, et le second est 7; 24 peut l'être trois fois, parce que le premier quotient est 12, le second 6, et le troisième 3. Le nombre 2 entre donc dans la composition d'un nombre pair une ou plusieurs fois comme facteur avec un nombre impair; d'où l'on conclura *qu'un nombre pair quelconque est le produit d'un nombre impair multiplié par le nombre* 2, *ou par quelqu'une de ses puissances.* Ainsi, $30 = 2.15$; $28 = (2)^2.7$; $24 = (2)^3.3$.

87. *Une puissance ne peut avoir d'autres facteurs en nombres premiers que ceux qui sont facteurs de sa racine.* Car la puissance est un produit dans lequel la racine entre un certain nombre de fois comme produisant. Or, un produit ne contient d'autres facteurs en nombres premiers que ceux qui sont dans ses deux produisants (79). Ainsi, le quarré de 10, qui est 100, n'a d'autres facteurs ou di-

(*) L'unité est regardée ici comme un nombre impair.

viseurs simples que 2 et 5, qui le sont de 10. Son cube qui est 1000, sa quatrième puissance qui est 10000, n'ont également que ceux-là.

88. De-là on peut conclure, 1.° *que si deux nombres n'ont pas de facteur commun, leurs puissances quelconques n'en auront point*; ou bien, *que deux nombres étant premiers entre eux, ils le seront encore, à quelque puissance qu'on les élève.*

2.° *Qu'un entier joint à une fraction réduite à l'expression la plus simple, ne peut devenir nombre entier seul par son élévation à quelque puissance.* Car il faudrait, pour cela, qu'en réduisant le tout à une seule fraction, et l'élevant à différentes puissances, le dénominateur pût diviser exactement le numérateur. Or, cette division est impossible; puisque ces nombres étant premiers entre eux dans la racine (82), le seront encore dans les puissances (1.°)

3.° *Qu'une fraction proprement dite, ne peut jamais devenir nombre entier, par son élévation à quelque puissance.* Ainsi $(\frac{1}{2})^2$ devient $\frac{1}{4}$, $(\frac{2}{3})^3$ devient $\frac{8}{27}$.

89. Remarques. Nous n'avons parlé jusqu'ici que des puissances des purs nombres abstraits; mais il est clair qu'on peut former des puissances avec des nombres positifs et négatifs, puisqu'on peut les multiplier les uns par les autres. Or, $+2 \times +2$, ou $(+2)^2 = +4$, de même -2×-2 ou $(-2)^2 = +4$; $+2 \times +2 \times +2$ ou $(+2)^3 = +8$; $-2 \times -2 \times -2$ ou $(-2)^3 = -8$, de même $(+2)^4$ ou $(-2)^4 = +16$; $(+2)^5 = +32$ et $(-2)^5 = -32$. D'où l'on conclura que *quel que soit le signe de la racine, celui de la seconde, de la quatrième, de la sixième et de toutes les puissances d'exposant pair sera +; mais que le signe de la troisième, de la cinquième, de la septième et de toute autre puissance d'exposant impair sera + ou —, suivant que le signe de la racine sera + ou —.*

90. Il s'ensuit de-là, *qu'il est impossible qu'un nombre réel ait une puissance d'exposant pair négative.*

Une pareille expression serait en effet contradictoire; puisque

puisque la notion qu'on a (89) d'une puissance d'exposant pair, suppose des facteurs en nombre pair, et que la notion des puissances négatives les suppose en nombre impair.

CHAPITRE III.

Des racines et des nombres irrationnels et imaginaires qui en résultent.

Nous avons déja dit qu'on appelle *racines*, ces nombres qui, multipliés par eux-mêmes, forment les puissances. On les distingue par les différents degrés de leurs puissances. Ainsi, on dit *racine seconde ou quarrée, racine troisième ou cubique, racine quatrième, racine cinquième*, etc.

91. Il est impossible qu'un nombre fractionnaire comme $\frac{2}{3}$, ou un nombre mixte, comme $4\frac{2}{3}$, puisse être la racine exacte d'un nombre entier quelconque (88,87). *Il faut donc que la racine d'un entier soit un entier, ou bien qu'elle soit indéterminable en nombres, soit entiers, soit fractionnaires, soit mixtes.*

En observant la suite naturelle des nombres entiers, on voit qu'il y en a peu dont les racines puissent être des entiers. Parmi les cent premiers nombres, par exemple, il n'y en a que dix dont les racines quarrées soient des entiers, il n'y en a que quatre qui aient des entiers pour leurs racines cubiques; et il y en a encore moins pour les racines plus basses. Il faut donc que tous les autres nombres aient des racines indéterminables. Tels sont 2, 3, 5, 7, 10, 11, etc. C'est pour désigner ces sortes de racines qu'on a imaginé le signe $\surd$ dont on couvre le nombre qu'il doit affecter. Ainsi $\sqrt{12}$ désigne la *racine quarrée* de 12. On écrit un chiffre dans le signe, pour dé-

terminer les différents degrés de la racine. Ainsi, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, etc., désignent les racines troisième, quatrième, cinquième, etc.

92. Quoiqu'il n'y ait ni fraction ni nombre mixte qui exprime exactement la racine d'un entier, quand elle n'est pas un entier elle-même (91), on peut cependant en approcher toujours, et même fixer les limites entre lesquelles elle se trouve. Par exemple, je vois d'abord que $\sqrt{6}$ est plus grande que 2, et plus petite que 3, puisque 2×2 donne $4 < 6$, et que 3×3 donne $9 > 6$(*). Pour en approcher davantage, je prends $2\frac{1}{4}$ ou $\frac{9}{4}$; l'élevant au quarré, j'ai $\frac{81}{16}$ ou $5\frac{1}{16}$, qui étant plus petit que 6, m'indique que $2\frac{1}{4} < \sqrt{6}$. Je prends ensuite $2\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{2}$, dont le quarré $\frac{25}{4}$ ou $6\frac{1}{4}$ surpassant 6, me montre que $2\frac{1}{2} > \sqrt{6}$. J'essaye $2\frac{1}{3}$ dont le quarré $5\frac{4}{9}$ me fait voir que $2\frac{1}{3} < \sqrt{6}$: d'où je conclus que cette racine est entre $2\frac{1}{4}$ et $2\frac{1}{3}$.

D'ailleurs, je suis assuré que $\sqrt{6}$ peut être nombrée avec d'autres racines; qu'étant multipliée une fois par elle-même, elle donne 6; qu'étant multipliée trois fois par elle-même, elle donne 36. Cela suffit *pour conclure qu'elle est un vrai nombre, quoiqu'elle ne soit ni un entier, ni une fraction, ni un entier joint à une fraction.* (Voyez Disc. prél. n.° XVI, XVII, XVIII).

93. Ces sortes de racines des nombres, lesquels ne sont pas des puissances exactes du même degré que la racine, sont désignées sous la dénomination de *nombres irrationnels* ou *incommensurables*, ou bien encore de *quantités sourdes*. Il y en a d'autant d'espèces qu'on peut imaginer de racines. Ainsi $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{12}$, sont des nombres irrationnels de différentes espèces. Par opposition à ceux-là, les autres nombres entiers, fractionnaires ou mixtes, sont appelés des *nombres rationnels ou commensurables*.

(*) Ce caractère $<$ désigne *plus grand* ou *plus petit*, suivant que la pointe est tournée à droite ou à gauche.

94. De ce que nous avons dit plus haut (89), il s'ensuit *qu'une puissance d'exposant pair est toujours positive, mais que sa racine est indifféremment positive ou négative*; ainsi $\sqrt{+4}$, ou $\sqrt[4]{+16}$ est ± 2, c'est-à-dire, *l'alternative* de $+2$ ou de -2. Or, quand une racine est d'exposant pair, la puissance à laquelle on la rapporte, est censée être également d'exposant pair. S'il arrive donc qu'une telle racine soit rapportée à un nombre négatif, comme dans $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-16}$, on suppose réunies deux choses contradictoires, savoir, une puissance *paire* et un nombre *négatif* qui la forme. Voilà pourquoi on appelle ces sortes d'expressions, des *racines impossibles ou imaginaires*. Telles sont celles-ci : $\sqrt{-2}$, $\sqrt[4]{-10}$, $\sqrt[8]{-30}$.

Quoiqu'il répugne qu'on puisse approcher de la valeur des imaginaires, ainsi qu'on approche de celle des incommensurables, elles peuvent cependant être nombrées, et même former des nombres réels par la multiplication. Ainsi, nous concevons $\sqrt{-2}$ comme donnant -2, en la multipliant par elle-même. *Rien n'empêche donc de mettre les imaginaires au rang des nombres.* (Voy. Disc. prél. n.° XVII.

OBSERVATION GÉNÉRALE.

95. D'après ce que nous venons de dire, on voit qu'il faut distinguer trois espèces de nombres, savoir, les *rationnels*, les *irrationnels* et les *imaginaires*; que la première espèce contient les entiers, les fractionnaires et les mixtes; la seconde, toutes les racines des nombres qui ne sont pas des puissances exactes du degré de la racine, mais desquelles on peut approcher à volonté; la troisième, les racines d'exposant pair des nombres négatifs. Si nous voulons donc dorénavant démontrer quelque propriété générale des nombres, ou bien établir quelque méthode qui s'étende sur tous, il faudra parcourir en détail ces différentes espèces, et les subdivisions de chacune, qui vont

à l'infini : ou bien il faudra, au lieu de chiffres qui ont toujours une signification déterminée, employer des symboles représentant tous les nombres quels qu'ils soient. Ces symboles devront être des caractères auxquels l'usage n'ait attaché aucune valeur numérique, comme, par exemple, les lettres de l'alphabet ; et *l'arithmétique symbolique* qui naîtra de là, sera évidemment la science de toutes sortes de nombres, ou bien *l'arithmétique universelle* ; c'est de celle-là que nous allons parler dans la seconde partie de cet ouvrage, sous le nom d'*Algèbre*.

Fin de l'Arithmétique.

SECONDE PARTIE.

ALGÈBRE.

SECTION PREMIÈRE.

Des Notions générales et des principales opérations de l'Algèbre.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions, Notions préliminaires et principes de convention.

96. *L'ALGEBRE est une science qui traite des propriétés générales des nombres par le moyen des symboles qui les représentent tous.* On l'a appelée, pour cette raison, *arithmétique spécieuse :* on peut l'appeler également *arithmétique universelle ;* et comme les lettres de l'alphabet n'ont parmi nous aucune valeur numérique ; que d'ailleurs l'usage en est familier, on les a employées de préférence à d'autres caractères, pour être les symboles de toutes sortes de nombres.

97. On appelle *terme algébrique* une ou plusieurs lettres écrites de suite, comme *a*, ou *abc*, ou *cde*.

Puisqu'il y a des nombres positifs et négatifs, il a fallu que les termes algébriques qui les représentent, fussent distingués par les signes d'opposition + et —. Ici donc, comme dans l'Arithmétique, on appellera *positifs* les termes qui seront précédés du signe +, et *négatifs* ceux qui seront précédés du signe —.

98. On appelle *quantité algébrique* un ou plusieurs termes écrits de suite avec leurs signes. Ainsi, ab ou $ab+bc-cd$ sont des quantités algébriques. Quand la quantité ne contient qu'un seul terme, elle est *incomplexe*, et s'appelle *monome*. Si elle en contient plusieurs, elle est *complexe*, et on l'appelle en général *polynome*. Le polynome prend le nom particulier de *binome*, s'il n'a que deux termes ; celui de *trinome*, s'il n'en a que trois ; celui de *quadrinome*, s'il n'en a que quatre, etc.

99. Afin d'énoncer et d'écrire plus briévement les quantités algébriques, on est convenu de ce qui suit :

1.° Qu'un terme qui ne serait précédé d'aucun signe, serait censé avoir le signe +, et représenter un nombre positif ;

2.° Que les lettres écrites de suite, sans être séparées par quelque signe, représenteroient des nombres qui sont censés se multiplier. Ainsi, abc signifie la même chose que $a \times b \times c$. Et comme plusieurs nombres multipliés ensemble donnent le même produit, dans quelqu'ordre qu'on les multiplie (75), il est indifférent d'écrire *abc* ou *acb* ou *bac*.

3.° Pour abréger, on est convenu encore qu'un chiffre placé à la droite et un peu au dessus d'une lettre, désignerait combien de fois cette lettre doit être écrite de suite. Ainsi, a^2 signifie aa, ou bien $a \times a$; $a^3 b$ désigne $aaab$, ou bien $a \times a \times a \times b$. Ce chiffre s'appelle *exposant*, et les lettres qui n'en sont point accompagnées, sont censées avoir l'unité pour exposant.

100. REMARQUE. Quelquefois on prend pour exposant un nombre indéterminé, comme ici a^n. Quelquefois aussi l'exposant se rapporte à tout un terme comme dans $\overline{ab}^2$ ou $(ab)^2$, qui signifie $ab \times ab$; ou bien à toute une quantité complexe comme dans $\overline{a+b}^2$ ou $(a+b)^2$, qui est ici pour $\overline{a+b} \times \overline{a+b} \times \overline{a+b}$. Mais alors on couvre cette quantité d'un trait au bout duquel on place l'exposant comme dans $\overline{a+b}^3$, ou bien on la renferme

entre deux parenthèses de cette manière $(a+b)^1$. En général, *l'exposant désigne toujours combien de fois la même quantité entre pour facteur dans un produit.*

101. Deux ou plusieurs termes sont *semblables*, lorsqu'ils contiennent les mêmes lettres accompagnées des mêmes exposants. Ainsi, dans $ab^2+ab^2+ab^2$, les trois termes sont semblables. *On peut donc ici prendre le terme ab^2 pour unité, et le nombrer avec ses semblables.* Ce qui donnera 3 fois ab^2 ou $ab^2\times 3$, ou bien $3ab^2$.

102. Le chiffre qu'on place à la tête d'un terme est appelé *coëfficient*; il en est un facteur et désigne combien de fois de suite le terme devrait être répété. Ainsi, $3ac$ désigne $3\times ac$, ou 3 fois ac, ou bien $ac+ac+ac$.

103. Quand un terme n'a pas de coëfficient exprimé, on peut l'envisager comme ayant l'unité pour coefficient. Ainsi, a^2b est la même chose que $1a^2b$. Quelquefois aussi on prend pour coëfficient un nombre indéterminé; mais alors on l'enferme entre deux parenthèses, comme étant un facteur qui multiplie le reste. Ainsi, dans $(a+b)d$, $a+b$ est le coëfficient de d.

104. COROLL. Il y a donc une grande différence entre un exposant et un coëfficient; car si l'on compare ensemble a^2 et $2a$, et qu'on suppose $a=4$, on aura $a^2=4\times 4=16$, et $2a=4+4=8$.

105. Une quantité algébrique a autant de dimensions, qu'elle contient de facteurs simples. Ainsi a^2 est de deux dimensions, parce qu'elle a deux facteurs simples, a et a. De même le produit $\overline{a+b}\times\overline{a+b}$ serait de deux dimensions (le trait qui couvre le binome $a+b$, désigne que la multiplication s'étend aux deux termes); $\overline{a+b}\times\overline{a+b}\times\overline{a+b}$, donnera un produit qui sera de trois dimensions, et ainsi de suite.

CHAPITRE II.

De la Réduction, de l'Addition et de la Soustraction des quantités algébriques.

106. *LA réduction est un changement fait dans l'expression d'une quantité, par lequel on la ramène au plus petit nombre possible de termes, sans changer sa valeur.* Cette manière de simplifier suppose qu'on réduit plusieurs termes en un seul, ce qui ne peut avoir lieu que pour les termes semblables, *parce qu'ils sont les seuls qui, ayant une unité commune, peuvent être nombrés les uns avec les autres.* Ainsi, $a^2 + 2a^2 + 3a^2$ deviennent $6a^2$ par réduction ; mais $a^2 + b^2 + 3c$ ne sauraient se réduire, parce qu'aucun de ces termes ne peut servir d'unité pour être nombré avec les autres.

107. RÈGLE. *Si plusieurs termes semblables ont même signe, réduisez-les à un seul, qui ait pour coëfficient la somme de tous les coëfficients : s'ils ont différents signes, prenez la somme des coëfficients positifs et celle des négatifs, écrivez le terme une seule fois avec un coëfficient égal à la différence des deux sommes et le signe de la plus grande.*

EXEMPLES. $3a^2b + c^2 + abq - c^2 + abd + a^2b$ devient par la réduction $4a^2b + abq + abd$..... $8a^4cd + 3a^2c - 7a^4cd - 3a^2c$, devient a^4cd.

Si l'on écrivait des nombres à la place des lettres qui les représentent, on les réduirait de même, pourvu qu'ils eussent une unité commune. Ainsi, $4 + 7 - 3$ devient $+8$.... $3 - 6 - 8 + 11$ devient o. Mais l'expression $12 + \sqrt{3} - \sqrt[3]{4}$ ne saurait se réduire, parce que ses termes n'ont point d'unité commune.

108. REMARQUE. Pour reconnaître plus aisément les termes semblables, il est bon d'écrire les lettres suivant

l'ordre alphabétique, surtout s'ils en contiennent beaucoup. Il est commode aussi de marquer d'un même signe chacun des termes semblables qui se trouvent dans une quantité, afin de prendre plus aisément leur somme ou leur différence. Ainsi, dans $4a^3cde + 2cd + 6dcr + adf - \frac{1}{2}a^3cde - 7dcr + 5adf - \frac{1}{2}a^3cde + xy + 3cd$, qui se réduit à $2a^3cde + 5cd - dcr + 6adf + xy$, les termes semblables sont marqués par des points disposés de la même manière.

109. ADDITION. *Dans l'addition de plusieurs quantités algébriques, on se propose d'en former une seule qui vaille leur somme ; et pour cela, on les écrit les unes à la suite des autres avec leurs signes.*

EXEMPLE.

Quantités à ajouter... $\begin{cases} 4a^3c - bd + 4a^4r \\ 6bd - 2a^3c \\ -4a^4r + 3ab. \end{cases}$

Somme.. $4a^3c - bd + 4a^4r + 6bd - 2a^3c - 4a^4r + 3ab.$

Cette somme se réduit à $2a^3c + 5bd + 3ab$. Avec un peu d'habitude dans le calcul, on réduit les quantités algébriques en les écrivant.

110. REMARQUE. On n'augmente pas toujours une quantité en lui en ajoutant une autre ; car si à ab, on ajoute $-a$, la somme $ab - a$ sera plus petite que ab (16). En général, *ajouter à une quantité celle d'une espèce opposée, c'est la diminuer dans son espèce ; et lui ajouter celle de sa propre espèce, c'est l'augmenter.*

111. SOUSTRACTION. *On se propose dans la soustraction algébrique de connaître la différence de deux quantités. Pour cela, on écrit la quantité qu'on veut soustraire à la suite de l'autre, en changeant ses signes de + en —, et de — en +.*

EXEMPLES.

Quantité donnée.....$a\,b + c$	Quantité donnée..$2\,x\,y - 2\,a\,x$
Quantité soustraite....$a\,c - d$	Quantité soustraite.$x\,y - 2\,a\,x$
Différence...$a\,b + c - a\,c + d$	Différence.....$x\,y$

Nous avons démontré ailleurs (18) la nécessité de changer les signes de la quantité soustraite. On peut s'en convaincre encore ici, en observant que, sans cela, la différence ajoutée à la quantité soustraite ne rétablirait jamais la quantité proposée, ce qui serait contre la nature de cette opération (10).

112. REMARQUES. I. *Si la quantité à soustraire est une fraction, changez seulement les signes de son numérateur, ou de son dénominateur :* car, comme on le verra plus bas, si les uns et les autres étaient changés à la fois, la fraction resterait telle qu'elle a été proposée. Ainsi pour soustraire $\frac{a^2 - x^2}{a - x}$ de b, j'écris $b - \frac{a^2 + x^2}{a - x}$, ou bien $b + \frac{a^2 - x^2}{-a + x}$.

II. Ainsi que l'addition n'augmente pas toujours une quantité, de même la soustraction ne la diminue pas toujours ; car $- b$ soustrait de a donne $a + b > a$.

CHAPITRE III.

De la Multiplication.

DANS la multiplication algébrique, on se propose le même objet que dans la multiplication numérique. C'est pour cela qu'il faut opérer sur quatre choses, sur les signes, sur les coëfficients, sur les lettres et sur les exposants.

113. Règle. 1.° *Le produit des termes qui ont des signes semblables est positif, et celui des termes qui ont des signes différents est négatif.* Ainsi $+ \times + = +$, $- \times - = +$, $+ \times - = -$, $- \times + = -$.

2.° *On multiplie les coefficients à la façon des nombres.*

3.° *Les lettres s'écrivent les unes à côté des autres sans signe.* Ainsi $a \times b$ devient $a\,b$.

4.° *Une lettre commune aux deux facteurs s'écrit une fois au produit avec un exposant égal à la somme de ses exposants, et chacune des autres s'écrit avec son exposant.* Ainsi $a^2\,b \times a^3\,b\,c = a^5\,b^2\,c$.

5.° *Si quelque facteur, ou tous les deux à la fois, sont des polynomes, on multiplie l'un par chaque terme de l'autre, et de la somme de ces produits partiels on forme le produit total.*

Exemples.

$1^{er}.. \; 3ab^2c \times 6ab^5c = 18a^2b^5c^3$ | $3^{me}.. -6c^2d \times -\frac{1}{2}d^2r = 3c^2d^3r.$

$2^{me}.. 4a^3b \times -6ad = -24a^4bd$ | $4^{me}.. \overline{7a^4+2b^3c-a^2} \times \overline{2a^3-b} =$

$$= \left\{ \begin{matrix} 14\,a^7 + 4\,a^3\,b^3\,c - 2\,a^5 \\ -7\,a^4\,b - 2\,b^4\,c + a^2\,b \end{matrix} \right\}$$

Démonstration. 1.° La règle des signes est fondée sur les mêmes raisons que celles que nous avons déja données pour la multiplication des nombres positifs et négatifs.

2.° La règle des coèfficients est fondée sur la nature de ces nombres; car $3a \times 2b = 3 \times a \times 2 \times b = 3 \times 2 \times a \times b = 6 \times a \times b = 6\,a\,b$.

3.° La règle des lettres est de convention (99.)

4.° La règle des exposants suit aussi de la nature de ces exposants; car $b^2 \times b^3$ est la même chose que $bb \times bbb = bbbbb = b^5$.

5.° La cinquième partie de la règle est fondée sur la même raison qui fait que, dans la multiplication numérique, on multiplie le multiplicande par chaque caractère du multiplicateur, et que de la somme des produits partiels on forme le produit total.

Pour exercer les commençants dans la pratique de cette opération, nous allons encore placer ici les exemples suivants.

EXEMPLES.

I.
Mutiplicande..... $a + b$
Multiplicateur..... $a - b$
Produits partiels.. $a^2 + a\,b$; $-a\,b - b^2$
Produit total..... $a^2 - b^2$

II.
Multiplicande..... $a^2 + 2\,a\,b + 2\,b^2$
Multiplicateur..... $a^2 - 2\,a\,b + 2\,b^2$
Produits partiels.. $a^4 + 2\,a^3\,b + 2\,a^2\,b^2$; $-2\,a^3\,b - 4\,a^2\,b^2 - 4\,a\,b^3$; $+2\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + 4\,b^4$
Produit total..... $a^4 + 4\,b^4$.

III.
Multiplicande..... $4\,a + 2\,b\,c$
Multiplicateur..... $4\,a + 2\,b\,c$
Produits partiels.. $16\,a^2 + 8\,a\,b\,c$; $+8\,a\,b\,c + 4\,b^2\,c^2$
Produit total..... $16\,a^2 + 16\,a\,b\,c + 4\,b^2\,c^2$.

114. REMARQUES. I. Pour multiplier un polynome quelconque par un monome, il suffit d'écrire ce monome dans chaque terme du polynome. Ainsi $\overline{p\,q + r + 1} \times x$ devient $p\,q\,x + r\,x + x$. Donc réciproquement, *si une même quantité est écrite dans plusieurs termes consécutifs, elle fait un produit avec tout ce qui n'est pas elle dans ces mêmes termes.* Ainsi $a^2\,x^2 - b^2\,x^2$ est le produit de $\overline{a^2 - b^2} \times x^2$. . . $x - b\,x + x^2\,c$ est le produit de $\overline{1 - b + x\,c} \times x$.

II. *Quand des facteurs sont en nombre pair, le signe du produit ne change pas en changeant à la fois tous les signes qui*

entrent dans ses facteurs ; il change, si les facteurs sont en nombre impair. Ainsi $+a \times +b$, ou $-a \times -b$ donnent également $+ab$; mais $+a \times +bc$ donnent $+abc$, tandis que $-a \times -b \times -c$ donnent $-abc$.

CHAPITRE IV.

De la Division.

115. L'OBJET de la division algébrique étant le même que celui de la division numérique, il faut, si l'opération est bien faite, *que le quotient, multiplié par le diviseur, rétablisse le dividende.* C'est de ce principe qu'on déduira toutes les règles de la division.

On indique cette opération en séparant les deux quantités par un trait, comme $\frac{a^2}{b}$; quelques-uns les séparent par deux points, comme $a^2 : b$ (*).

Quand on propose à diviser une quantité algébrique par une autre, il ne peut se présenter que trois cas différents, savoir : 1.° que le dividende et le diviseur soient tous les deux monomes ; 2.° que l'un soit monome et l'autre polynome ; 3.° qu'ils soient tous les deux polynomes.

PREMIER CAS.

Division des quantités monomes.

116. I. RÈGLE DES SIGNES. *Le quotient des signes semblables est positif, et le quotient des signes différents est négatif.*

Ainsi, $\frac{+}{+}$ ou $\frac{-}{-} = +$; $\frac{+}{-}$ ou $\frac{-}{+} = -$.

(*) Nous n'userons jamais de ce signe de division, crainte qu'on ne confonde les raisons avec des fractions.

II. RÈGLE DES COEFFICIENTS. *Les coëfficients se divisent à la façon des nombres, et si la division ne peut se faire exactement, on les met au quotient en forme de fraction réduite à l'expression la plus simple.* —

III. RÈGLE DES LETTRES ET DES EXPOSANTS. 1.° *Toute lettre du diviseur qui n'a pas sa pareille dans le dividende, se met en fraction sous le dividende.* Ainsi, pour diviser a par b, j'écris $\frac{a}{b}$.

2.° Si quelque lettre du diviseur a sa pareille dans le dividende, ou bien elle a même exposant par tout, et *alors on l'efface, mettant* 1 *à sa place dans le terme où elle est seule*; ou bien elle a différents exposants, *alors on l'efface seulement dans le terme où elle a le plus petit exposant (mettant* 1 *à sa place, si elle y est seule), et on l'écrit dans l'autre, avec un exposant égal à la différence des exposants.* Ainsi, $\frac{a^2}{a} = \frac{a}{1} = a$; $\frac{b^2}{b^5} = \frac{1}{b^3}$.

Toutes ces règles sont fondées sur ce que nous avons dit plus haut (115).

EXEMPLES.

$$\frac{4a^2b}{-2a} = -2ab. \quad \frac{3b^2c}{12bc} = \frac{1}{4}b. \quad \frac{6b^3cd^2r}{8b^4c^2d^3} = \frac{3}{4}\frac{r}{bcd}. \quad \frac{a^4cd}{-a^4c^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{c^2}\frac{2}{d^2}.$$

SECOND CAS.

Division de deux quantités, dont l'une est polynome et l'autre monome.

117. RÈGLE. I. *Si le dividende est polynome et le diviseur monome, opérez sur chaque terme en particulier, comme dans le cas précédent.* Ainsi, $\frac{a^2bx - a^2cx + qx}{-x} = -a^2b + a^2c - q$;

$$\frac{x^2 - x^3 + a^2x^2}{x^2} = 1 - x + a^2.$$

118. COROLL. *Quand une même lettre se trouve dans plusieurs termes consécutifs, pour les diviser par cette lettre, il suffit de l'effacer partout avec le même exposant (ayant égard aux changements de signe, et mettant* 1 *dans les termes où elle est seule).* Ainsi, $\frac{a^2 b - a^2}{-a^2} = -b + 1$. $\frac{x^3 - x^2 y}{x^2} = x - y$.

II. Si le dividende est monome, et le diviseur polynome : 1.° *Le quotient sera fractionnaire.* 2.° *Cette fraction sera réduite à sa plus simple expression, en effaçant les mêmes quantités dans le dividende et dans chaque terme du diviseur (mettant toujours* 1 *dans le terme qui est tout effacé).* Ainsi, $\frac{a^2}{2a^2 - a^2 c - a^3} = \frac{1}{2 - c - a}$; $\frac{a^2 c}{a^2 c - abd} = \frac{ac}{ac - bd}$.

TROISIEME CAS.

Division des quantités polynomes.

119. La première chose qu'il y a à faire dans ce cas, c'est *d'ordonner* le dividende et le diviseur par rapport à une lettre commune à tous les deux, c'est-à-dire, *d'en écrire les termes suivant l'ordre décroissant des exposants de cette lettre.* Si cette lettre entre dans plusieurs termes avec le même exposant, on les écrit avec leurs signes les uns sous les autres, et cet assemblage est considéré comme un seul *terme complexe.* On opère ensuite en détail comme dans la division numérique (33).

EXEMPLE I.

$$\text{Dividende.}\left\{\begin{array}{l} x^3 - ax^2 + abx - abc \\ \quad -bx^2 + acx \\ \quad -cx^2 + bcx \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x^2 - ax + ab \\ \quad -bx \\ \hline x - c \end{array}\right. \begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\}\text{Diviseur.} \\ \left.\begin{array}{l}\\ \end{array}\right\}\text{Quotient .....}\end{array}$$

$$\text{A..}\left\{\begin{array}{l} -x^3 + ax^2 - abx \\ \quad +bx^2 \end{array}\right.$$

$$\text{R..}\left\{\begin{array}{l} -cx^2 + acx - abc \\ \quad +bcx \end{array}\right.$$

$$\text{B..}\left\{\begin{array}{l} cx^2 - acx + abc \\ \quad -bcx \end{array}\right.$$

Tout étant ordonné par rapport à x (ex. I.), je dis $\frac{x^3}{x^2} = x$ que j'écris au quotient; je multiplie le diviseur par x, et j'en écris le produit en A avec des signes contraires, pour le soustraire du dividende. Plaçant o sous chacun des termes qui se détruisent, j'écris le reste en R, et je dis ensuite: $-\frac{cx^2}{x^2} = -c$; j'écris $-c$ au quotient. Multipliant et soustrayant à l'ordinaire, j'écris le produit en B avec des signes contraires; et comme il ne vient pas de nouveau reste, j'en conclus que le quotient exact est $x-c$.

120. Il faut, s'il se peut, ordonner de telle sorte que le premier terme du diviseur soit incomplexe, comme dans l'exemple précédent; et si cela ne peut se faire, il faut chercher le quotient en détail, en divisant à part chaque terme complexe du dividende par tout le diviseur. Pour cela, *ordonnez l'un et l'autre par rapport à une nouvelle lettre qui rende le premier terme du diviseur incomplexe, et le premier terme du dividende aussi complexe qu'il sera possible.*

EXEMPLE

EXEMPLE II.

Dividende.	$a^5 - a^4bc - a^3b - a^2b^2 + ab^2c + b^3$	$a^3 - b^2$ / $+a^3b$ } Diviseur.
	$a^5b - a^4c - a^3b^2$	
A	$-a^5 + a^2b^2$	
	$-a^5b$	$a^2 - ac - b$ } Quotient.
R′	$-a^4bc - a^3b + ab^2c + b^3$	(Case 1)
	$-a^4c - a^3b^2$	$a^5b + a^5 \mid a^3b + a^3$ / a^2
B	$+a^4c - ab^2c$	(Case 2)
	$+a^4bc$	$-a^4bc - a^4c \mid a^3b + a^3$ / $-ac$
R″	$-a^3b + b^3$	(Case 3)
	$-a^3b^2$	$-a^3b^2 - a^3b \mid a^3b + a^3$ / $-b$
C	$+a^3b - b^3$	
	$+a^3b^2$	

Le dividende et le diviseur étant ici ordonnés par rapport à la lettre a (ex. II.), ont chacun pour premier terme une quantité polynome ou complexe ; c'est pourquoi je divise cette quantité à part, en ordonnant par rapport à la lettre b (Voy. case 1), et le quotient juste est a^2 ; multipliant le diviseur par a^2 et changeant les signes, j'ai la quantité A; puis réduisant le tout, le premier reste est R′.

Puisque le premier terme de ce reste est complexe, ainsi que le premier terme du diviseur, j'en fais encore une division à part ; et en les ordonnant par rapport à la lettre b (Voy. case 2), le quotient est $-ac$; multipliant $-ac$ par tout le diviseur, j'ai, en changeant les signes, le produit B, et après la réduction il vient pour second reste R″.

Puisque le premier terme de ce second reste est encore complexe, j'en fais la division à part (Voy. case 3), et le quotient est $-b$. Multipliant $-b$ par le diviseur, et changeant les signes, j'ai la quantité C; réduisant ensuite à l'ordinaire, il ne me reste rien. D'où je conclus que le quotient exact est a^2-ac-b.

Je m'en assure de nouveau en multipliant le diviseur par ce quotient, ce qui donne pour produit le dividende proposé.

CHAPITRE V.

Où l'on enseigne à trouver tous les diviseurs exacts d'une quantité algébrique, et où l'on démontre la méthode déja donnée pour déterminer la plus grande mesure commune de deux nombres.

121. POUR trouver tous les diviseurs exacts d'une quantité algébrique, on opère comme dans les nombres; c'est-à-dire, *qu'on divise d'abord la quantité proposée par tous ses diviseurs simples, jusqu'à ce que l'on ait l'unité pour quotient. Ensuite on multiplie tous ces diviseurs les uns par les autres, et l'ensemble de ces produits et de ces diviseurs simples, renferme tous les diviseurs exacts de la quantité proposée.*

EXEMPLE. Soit la quantité $a^3b+a^2b^2$ dont on demande tous les diviseurs; je les dispose comme on le voit ici.

$a^3b+a^2b^2$	a.
a^2b+ab^2	a, a^2.
$ab+b^2$	b, ab, a^2b
$a+b$	$a+b, a^2+ab, a^3+a^2b, ab+b^2, a^2b+ab^2, a^3b+a^2b^2$.
1	

Je tire une ligne de haut en bas, pour séparer les diviseurs; puis divisant la quantité donnée par a, le quotient est a^2b+ab^2, que j'écris sous la quantité proposée. Je vois que ce quotient peut être encore divisé par a,

j'écris donc a à la droite, et le quotient $ab+b^2$ à la gauche de la ligne. Multipliant ensemble les diviseurs trouvés, j'ai a^2 que j'écris à la droite et sur la même ligne que a. $ab+b^2$ ne pouvant être divisé que par b, j'écris b à la droite de la ligne verticale, et le quotient $a+b$ à la gauche. Je multiplie tous les diviseurs trouvés par b, et j'écris sur la même ligne les produits ab, a^2b. $a+b$ ne pouvant être divisé que par lui-même, je l'écris au rang des diviseurs, et je mets 1 au quotient. Multipliant enfin ce nouveau diviseur par tous les autres déja trouvés, j'en écris les produits sur la même ligne, et j'ai là tous les diviseurs de la quantité proposée.

122. Avant de démontrer la règle que nous avons donnée plus haut (48), pour trouver le plus grand diviseur commun, ou la plus grande mesure commune de deux nombres, il faut rappeler ce que nous avons dit (77 et 78) et y ajouter *que dans toute division exacte, le diviseur mesure le dividende; et qu'ainsi dès qu'il y a un reste, en ôtant ce reste du dividende, le diviseur le mesurera exactement.* Par exemple, $\frac{17}{3}$ donne 5 pour quotient et 2 pour reste, ôtez 2 de 17, et le diviseur 3 mesurera exactement $17-2$, qui sont 15.

123. La règle qu'il faut démontrer est celle-ci: *lorsque divisant un nombre* a *par un plus petit* b, *il vient un reste* c; *que divisant* b *par* c, *il vient un reste* d; *que divisant* c *par* d, *il vient un reste* e; *que divisant* d *par* e, *il ne vient point de reste, je dis que* e *sera la plus grande mesure commune des deux nombres* a *et* b.

DÉMONSTRATION. I. e sera la mesure commune de a et de b. Car 1.° e mesure d (hyp.); d mesure $c-e$ (122). Donc e mesure $c-e$: dailleurs e mesure e. Donc (78) il mesure cette somme $c-c+e$, qui devient c. Donc 1.° e mesure c.

Div^{rs}.	Div^{rs}.	Restes.
a	b	c
b	c	d
c	d	e
d	e	0

2.° *e* mesure *c*; *c* mesure *b*—*d*; donc *e* mesure *b*—*d* (80): d'ailleurs *e* mesure *d*(hyp.), donc *e* mesure la somme *b*—*d*+*d*, qui se réduit à *b*: donc 2.° *e* mesure *b*.

3.° *e* mesure *b*; *b* mesure *a*—*c*; donc *e* mesure *a*—*c*: d'ailleurs *e* mesure *c*; donc *e* mesure la somme *a*—*c*+*c* ou *a*; donc enfin, *e* sera mesure commune de *a* et de *b*.

II. Je dis que *e* sera la plus grande mesure commune que puissent avoir *a* et *b*. Car, si un nombre plus grand que *e*, par exemple *f*, mesurait *a* et *b*, on pourrait raisonner ainsi:

1.° *f* mesure *b* (hyp.); *b* mesure *a*—*c*; donc *f* mesure *a*—*c*: d'ailleurs *f* mesure *a*; donc (81) il mesure la différence que donne *a*—*c* soustrait de *a*; ou bien *a*—*a*+*c*=*c*; donc 1.° *f* mesure *c*.

2.° *f* mesure *c*; *c* mesure *b*—*d*, donc *f* mesure *b*—*d*: d'ailleurs *f* mesure *b* (hyp.); donc *f* mesure la différence que donne *b*—*d* soustrait de *b*, laquelle est *d*. Donc 2.° *f* mesure *d*.

3.° *f* mesure *d*; *d* mesure *c*—*e*; donc *f* mesure *c*—*e*; d'ailleurs *f* mesure *c*(1.°); donc (81) *f* mesure la différence que donne *c*—*e* soustrait de *c*, c'est-à-dire, *e*; donc *f* mesure *e*, ce qui est absurde; puisque *f* est plus grand que *e* par l'hypothèse. Il ne peut donc pas y avoir un nombre plus grand que *e*, qui soit la mesure commune de *a* et de *b*.

SECTION II.

Des puissances et des racines.

CHAPITRE PREMIER.

De la formation des puissances et de leurs principales propriétés.

124. DÉFINITION. *Toute expression qui ne contient que l'unité multipliée un certain nombre de fois par la même quantité, est une puissance de cette quantité.* Le nombre qui désigne combien de fois l'unité a été ainsi multipliée, est *l'exposant de la puissance*; et la quantité qui a multiplié l'unité, en est *la racine.*

Ainsi, puisque a est la même chose que $1 \times a$; a sera la première puissance de a; et en général, *la première puissance d'une quantité est cette quantité même* Puisque $a^2 = 1 \times a \times a$, a^2 sera la seconde puissance de a; a^3 la troisième; a^4 la quatrième, etc. (par analogie aux dimensions de l'étendue, la seconde puissance d'une quantité est appelée son *quarré*, et la troisième son *cube*). Comme la puissance est toujours relative à la racine, on voit bien qu'il a fallu distinguer autant d'espèces de racines que de puissances. Ainsi, a est la racine première de a, la racine seconde ou quarrée de a^2, la racine troisième ou cubique de a^3, etc.

125. COROLLAIRE. On conclura de la définition des exposants: 1.° *que toute expression numérique qui indiquera combien de fois une même quantité multiplie l'unité, doit servir d'exposant à cette quantité.* Or, ce nombre de fois peut exiger pour expression exacte, tantôt un nombre

rationnel, tantôt un nombre irrationnel. *L'une et l'autre espèce de ces nombres peut donc servir d'exposant à une quantité.*

126. 2.° Rien n'empêche de donner aux exposants les signes d'opposition + et —. Mais alors l'exposant négatif doit désigner le contraire de ce que désigne le positif, c'est-à-dire que celui-ci désignant que l'unité a été multipliée, l'autre désignera qu'elle a été divisée par la même quantité, de sorte que si a^3 représesente $1 \times a \times a$, a^{-2} exprimer a $\frac{1}{\frac{a}{a}}$ ou $\frac{1}{a^2}$; de même a^{-3} indiquera que que 1 a été divisé trois fois par a ou $\frac{1}{a^3}$ et enfin a^{-n} vaudra $\frac{1}{a^n}$; d'où l'on conclura : *Qu'une quantité élevée à une puissance négative vaut l'unité divisée par cette quantité élevée à la même puissance positive.*

127. 3.° Pour désigner le cas où l'unité n'a été ni multipliée ni divisée par une même quantité, il faut nécessairement donner o pour exposant à la quantité. Ainsi, a^0 désigne 1 multiplié o fois par a, ou bien $a^0 = 1$. D'où l'on conclut *qu'une quantité quelconque avec l'exposant* o, *est une expression particulière de l'unité.*

On peut tirer de-là ces conclusions singulières : 1.° que $(o)^0 = 1$, puisque, d'après la définition des puissances et de leurs exposants, $(o)^0$ vaut 1 multiplié o fois par o; 2.° que $(o)^{+n} = o$ puisque $(o)^{+n} = 1$ multiplié n fois par o; 3.° que $(o)^{-n} = \frac{1}{o^n} = \frac{1}{o}$, expression qui désigne *l'infini*, comme nous le verrons plus bas; 4.° que $(1)^0$, ainsi que $(1)^{\pm n} = 1$; ce qui indique que *toutes les puissances de* 1 *sont* 1, *propriété qui ne convient qu'à l'unité.*

128. Corollaire I. Il suit de la nature des exposants

négatifs : 1.° que $\frac{a}{b^2}$ peut prendre la forme ab^{-2}, puisque $ab^{-2} = a \times \frac{1}{b^2} = \frac{a}{b^2}$ ... que pour $\frac{a}{b^{-2}}$ on peut écrire ab^2, puisque $ab^2 = \frac{a}{\frac{1}{b^2}} = \frac{a}{b^{-2}}$ ... que $\frac{a}{2bc^3}$ peut se présenter ainsi, $\frac{1}{2} \cdot ab^{-1}c^{-3}$, ou bien ainsi, $2^{-1} \cdot ab^{-1}c^{-3}$ ... que $\frac{a}{(b+c)^m}$ peut prendre cette forme $a(b+c)^{-m}$ .... etc. c'est-à-dire *qu'on peut présenter une fraction sous la forme d'un entier, en effaçant le dénominateur et multipliant le numérateur par ce même dénominateur, dans lequel on a changé les signes des exposants.*

2.° Réciproquement qu'à la place de ab^2, on peut écrire $\frac{a}{b^{-2}}$; à la place de a on peut prendre $\frac{1}{a^{-1}}$; pour $a^n b^m$ on peut écrire $\frac{1}{a^{-n}b^{-m}}$, etc. Donc *un entier peut se présenter sous la forme d'une fraction, en composant son dénominateur des facteurs de cet entier, dans lesquels on a changé les signes des exposants.*

129. Corollaire II. On conclura de ce que nous avons dit plus haut (124), *que pour élever une quantité à une puissance positive, il suffit de la multiplier par elle-même autant de fois, moins une, que l'exposant de la puissance demandée contient d'unités.* Ainsi, a^2b élevé à sa première puissance ou $(a^2b)^1$, reste a^2b.... a^2b élevé à sa seconde puissance, ou $(a^2b)^2$, devient $a^2b \times a^2b$, ou a^4b^2 ..... a^2b élevé à sa troisième puissance, ou $(a^2b)^3$, est $a^2b \times a^2b \times a^2b$, ou a^6b^3 : .... $(2a - b)^2$, ou $(2a - b)(2a - b)$ donne $4a^2 - 4ab + bb$.

130. Corollaire III. Il suit de-là, 1.° *que pour la formation des puissances monomes* (abstraction faite des signes) *on peut, pour abréger, multiplier l'exposant de chaque*

lettre par l'exposant de la puissance demandée. Ainsi, $(a^2c)^3$ devient $a^{2.3}c^{1.3}$, ou a^6c^3... $(a^2c)^{\frac{1}{2}}$ devient $a^{2\times\frac{1}{2}}c^{1\times\frac{1}{2}}$, ou $ac^{\frac{1}{2}}$... $(a^2c)^{-2}$ devient $a^{2\times-2}c^{1\times-2}$, ou $a^{-4}c^{-2}$.

Mais si l'on veut connaître le signe de la puissance, il faut recourir à la voie ordinaire de la multiplication. Ainsi, $(+a^2c)^2$, ou $+a^2c\times+a^2c$ deviendra $+a^4c^2$; de même $(-a^2c)^2$, ou $-a^2c\times-a^2c$ deviendra également $+a^4c^2$..... $(-a^2c)^3$ donnera $-a^6c^3$.... $(\pm a^{\frac{1}{2}})^3$, c'est-à-dire, $+a^{\frac{1}{2}}\times+a^{\frac{1}{2}}$ ou $-a^{\frac{1}{2}}\times-a^{\frac{1}{2}}$ deviendra $+a$.

131. Remarque. Cette manière abrégée de former les puissances monomes ne faisant point opérer sur le signe de la racine, ne saurait indiquer celui de la puissance; et il y aurait souvent erreur de donner à celle-ci le signe de la première, en se bornant à multiplier l'exposant de chaque lettre par l'exposant de la puissance demandée.

CHAPITRE II.

Des différentes puissances du Binome $a \pm b$.

132. En élevant le binome $a \pm b$ aux cinq premières puissances, il deviendra....

I..... $a \pm b$

II..... $a^2 \pm 2ab + b^2$

III..... $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

IV..... $a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

V..... $a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$

133. Sur quoi on fera d'abord cette observation générale : *que chacune de ces puissances du binome renferme un terme de plus que l'exposant de la puissance formée ne contient d'unités*; et on en déduira ensuite les règles suivantes pour la formation abrégée de ces diverses puissances.

134. I. *Règle des exposants.* Les exposants de a dimi-

nuent, suivant la progression naturelle, depuis le premier terme jusqu'au dernier ; de façon que dans le premier terme, l'exposant de a est l'exposant de la puissance, et dans le dernier il est zéro. Les exposants de b suivent un ordre contraire.

135. II. *Règle des signes.* Si les deux termes du binome sont positifs, tous les signes de la puissance seront positifs, si l'un est négatif, les signes seront alternativement positifs et négatifs ; et en général, *ce terme sera négatif, dans lequel les dimensions de la quantité négative entreront en nombre impair.*

136. III. *Règle des coèfficients.* Le coèfficient du premier terme vaut toujours l'unité, et le coèfficient de chacun des autres est égal au coèfficient du terme précédent, multiplié par l'exposant de a dans le même terme, et divisé par le nombre qui désigne le rang que ce terme précédent occupe.

137. Puisque ces observations ne dépendent pas du degré de la puissance formée, l'analogie permet de conclure qu'elles s'étendent à une puissance quelconque ; et qu'ainsi elles peuvent servir de règle pour élever le binome $a+b$ à la puissance n, ce qui donnera :

$$(a+b)^n = a^n + n.a^{n-1}b + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$$

$$a^{n-3}b^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4.}a^{n-4}b^4 + \text{etc.}$$

Mais on peut écrire $\frac{a^n}{a}$ au lieu de a^{n-1} (128); $\frac{a^n}{a^2}$ au lieu de a^{n-2}, et ainsi des autres. On peut donc faire disparaître les exposants négatifs dans la quantité précédente, et elle devient :

$$(a+b)^n = a^n + \frac{na^nb}{a} + \frac{n.n-1}{1.2}.\frac{a^nb^2}{a^2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.\frac{a^nb^3}{a^3} + \frac{n.n-1.}{1.}$$

$$\frac{n-2.n-3}{2.3.4.}.\frac{a^nb^4}{a^4} + \text{etc.}$$

Or, il faut remarquer ici que a^n entrant dans tous les

termes, on peut (114) donner à cette quantité la forme suivante:

$$(a+b)^n = a^n\left(1 + n.\frac{b}{a} + \frac{n.\,n-1}{1.\,2}.\frac{b^2}{a^2} + \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3}.\frac{b^3}{a^3} + \frac{n.\,n-1.}{1.}\right.$$

$$\left.\frac{n-2.\,n-3}{2.\,3.\,4}.\frac{b^4}{a^4} + \text{etc.}\ldots.\right).$$

Afin de se servir commodément de cette formule, il ne s'agit à présent que de trouver une méthode aisée de former la suite des termes qui sont entre les deux crochets, puisqu'il suffit de les multiplier par a^n, pour avoir la puissance n du binome $a+b$.

138. RÈGLE. *Ecrivez d'abord sur une même ligne la suite* A, *jusqu'à ce que vous trouviez zéro pour un de ses termes, et la suite* B *que nous cherchons, se formera en lui donnant l'unité pour premier terme, et faisant chacun des autres égal au dernier terme écrit de cette même suite* B, *multiplié par son correspondant dans la suite* A *et par* $\frac{b}{a}$.

(A).. $n, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3}, \frac{n-3}{4}$, etc.

(B).. $1 + n.\frac{b}{a} + \frac{n.\,n-1}{1.\,2}.\frac{b^2}{a^2} + \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3.}.\frac{b^3}{a^3} + \frac{n.\,n-1\;n-2.\,n-3}{1.\,2.\,3.\,4}.$

$\frac{b^4}{a^4} +$, etc.

Ainsi, le second terme de la suite B se trouve en multipliant 1 par n et par $\frac{b}{a}$. Le troisième se trouve en multipliant le second $n.\frac{b}{a}$ par $\frac{n-1}{2}$ et par $\frac{b}{a}$; et ainsi des autres.

139. EXEMPLE I. Soit (a^2-x^2) à élever à sa troisième puissance par le moyen de la règle ci-dessus. Je commence par former la suite A, qui ne peut avoir que trois termes, puisque le quatrième seroit $\frac{3-3}{4}$ ou o. Ensuite je la réduis et je l'écris au dessous en A'. Je vois qu'ici $\frac{b}{a}$ de la formule, ou bien le second terme divisé par le premier, est exprimé

par $-\frac{x^2}{a^2}$, et a^n par a^6. C'est pourquoi je forme, suivant la règle, la partie de la suite B qui est entre les deux crochets; puis la multipliant par a^6, et réduisant en B', j'ai la puissance demandée.

$$(A)\ldots\ 3,\ \frac{3\cdot 1}{2},\ \frac{3\cdot 2}{3}.$$

$$(A')\ldots\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3}.$$

$$(B)\ldots\ a^6\left(1-\frac{3x^2}{a^2}+\frac{3x^4}{a^4}-\frac{x^6}{a^6}.\right)$$

$$(B')\ldots\ a^6-3a^4x^2+3a^2x^4-x^6$$

140. Exemple II. On demande la puissance $\frac{1}{2}$ de la même quantité a^2-x^2. Pour cela je forme d'abord la suite A, que je réduis à A'. Puis observant qu'ici le second terme divisé par le premier, donne $-\frac{x^2}{a^2}$, je trouve d'après la règle (138), la suite B que je réduis à B', en faisant les multiplications indiquées....

$$(A)\ldots\ \tfrac{1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-2}{3},\ \frac{\frac{1}{2}-3}{4},\ \frac{\frac{1}{2}-4}{5},\ \ldots\ldots$$

$$(A')\ldots\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{3}{6},\ -\frac{5}{8},\ -\frac{7}{10},\ \ldots\ldots$$

$$(B)\ldots\ a\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x^4}{a^4}-\frac{3}{48}\cdot\frac{x^6}{a^6}-\ldots\ldots\right.$$

$$(B')\ldots\ a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{3x^6}{48a^5}-\ldots\ldots\ldots,$$

Pour m'assurer que la suite B' est l'approximation de la puissance $\frac{1}{2}$, j'observe que cette puissance doit être la racine quarrée approchée de la quantité a^2-x^2; et qu'ainsi en élevant cette suite au quarré, je dois trouver a^2-x^2. Or, c'est ce qui arrive, comme on le voit dans le calcul suivant, dans lequel on a négligé les puissances plus hautes que celles qui sont entrées dans B', et où l'on

a multiplié toute la suite par son premier terme a dans la première ligne, par son second terme $-\frac{x^2}{2a}$ dans la seconde, par son troisième terme $-\frac{x^4}{8a^3}$ dans la 3.me, etc.

$$\left.\begin{array}{rrrr} a^2 & -\frac{ax^2}{2a} & -\frac{ax^4}{8a^3} & -\frac{3ax^6}{48a^5}\cdots \\ & -\frac{ax^2}{2a} & +\frac{x^4}{4a^2} & +\frac{1x^6}{16a^4}\cdots \\ & & -\frac{ax^4}{8a^3} & +\frac{x^6}{16a^4}\cdots \\ & & & -\frac{3ax^6}{48a^5}\cdots \end{array}\right\} = a^2 - x^2.$$

141. Exemple III. On demande d'élever $a^2 - x^2$ à la puissance -1 par la même règle. Je forme d'abord la suite A, qui étant réduite me donne A'. Puis je trouve, par le moyen de la règle (138) la suite B, que je réduis encore à B', et celle-ci me présente la puissance cherchée.

(A)... $-1, \frac{-1-1}{2}, \frac{-1-2}{3}, \frac{-1-3}{4}, \ldots$.

(A')... $-1, -1, -1, -1,$ — etc.

(B)... $(aa)^{-1}\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \text{etc.}\right)$

(B')... $\frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} + \frac{x^6}{a^8} + \frac{x^8}{a^{10}} + \text{etc.}$

Pour m'assurer que cette suite de termes donne la valeur approchée de $(a^2 - x^2)^{-1}$, j'observe que $(a^2 - x^2)^{-1} = \frac{1}{a^2 - x^2}$. Or, un quotient multiplié par le diviseur, doit rétablir le dividende. Il faut donc que la suite précédente, multipliée par le diviseur $a^2 - x^2$, donne 1 pour produit; ce qui se vérifie par le calcul suivant, dans lequel on s'est arrêté aux sixièmes puissances de x.

$$\frac{x^0}{a^2}+\frac{x^2}{a^4}+\frac{x^4}{a^6}+\frac{x^6}{a^8}$$
$$a^2-x^2$$

$$\left.\begin{aligned} x^0+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6} \\ -\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^4}{a^4}-\frac{x^6}{a^6}\end{aligned}\right\}=x^0=1$$

142. Si au lieu d'un binome, on voulait élever un polynome quelconque à ses diverses puissances, il est évident qu'on le pourrait par le moyen de la formule générale du binome. Par exemple, soit le trinome $(a+b+c)^n$ on supposera $b+c=q$, et on aura $(a+q)^n$ dans laquelle substituant, $b+c$ pour q; $(b+c)^2$ pour q^2; $(b+c)^3$ pour q^3, etc., on aura la puissance demandée du trinome $a+b+c$.

Si on avait le quatrinome $(a+b+c+d)^n$, on ferait $b+c+d=r$ et il viendrait $(a+r)^n$, laquelle, étant une fois formée par les règles ci-dessus, on substituerait $b+c+d$ pour r; $(b+c+d)^2$ pour r^2; $(b+c+d)^3$ pour r^3 et ainsi de suite. D'où l'on voit que le cas du trinome est ramené à celui du binome, celui du quatrinome à celui du trinome, et ainsi successivement (*).

143. Remarque importante. Nous avons observé plus haut (137), que les règles assignées (134, 135, 136), pour la formation de la puissance n du binome $a+b$, *ne dépendant pas du degré de cette puissance, l'analogie permettait de conclure qu'elles s'étendent à toutes*; et les exemples donnés à la suite, ont confirmé ce raisonnement.

On ne peut, en effet, élever aucun doute à cet égard pour tous les cas d'un exposant positif, soit entier, soit

---

(*) On donnera plus bas, n.° 313, une méthode plus expéditive pour la formation des puissances des polynomes.

fractionnaire, puisque n peut toujours représenter ces sortes d'exposants; mais il n'en est pas de même dans les cas d'un exposant négatif, et l'induction alors a besoin d'être confirmée par une démonstration directe.

Il s'agit donc de faire voir que, conformément aux règles ci-dessus (134, 135, 136), $(b+c)^{-n} = b^{-n} - n.b^{-n-1}.c - n.\frac{-n-1}{2}.b^{-n-2}.c^2 - n.\frac{-n-1}{2}.\frac{-n-2}{3}$ $b^{-n-3}.c^3$ — etc., et comme $(b+c)^{-n} = \frac{1}{(b+c)^n}$ ...

$$= \frac{1}{b^n + nb^{n-1}c + n.\frac{n-1}{2}.b^{n-2}c^2 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}b^{n-3}c^3 + \text{etc.}}$$

Tout se réduit à prouver que le quotient de cette dernière division est la suite cherchée $b^{-n} - nb^{-n-1}c - n.\frac{-n-1}{2}.b^{-n-2}c^2 - n.\frac{-n-1}{2}.\frac{-n-2}{3}b^{-n-3}c^3$ — etc. . . . Or, cela est ainsi; et le tableau suivant offre le détail de tous les calculs, nécessairement longs, qui démontrent cette vérité.

La première ligne de ce tableau présente le dividende 1, séparé par l'accolade de son diviseur, lequel est désigné ici par la majuscule A; le quotient écrit en B forme la seconde ligne; la troisième ne contient que le premier terme du quotient qui se trouve en divisant 1 par le premier terme b^n du diviseur.

La ligne D est le produit de ce premier terme du quotient multiplié par le diviseur A, et écrit avec des signes contraires pour le soustraire du dividende 1; et le reste obtenu, réduction faite, forme la ligne E.

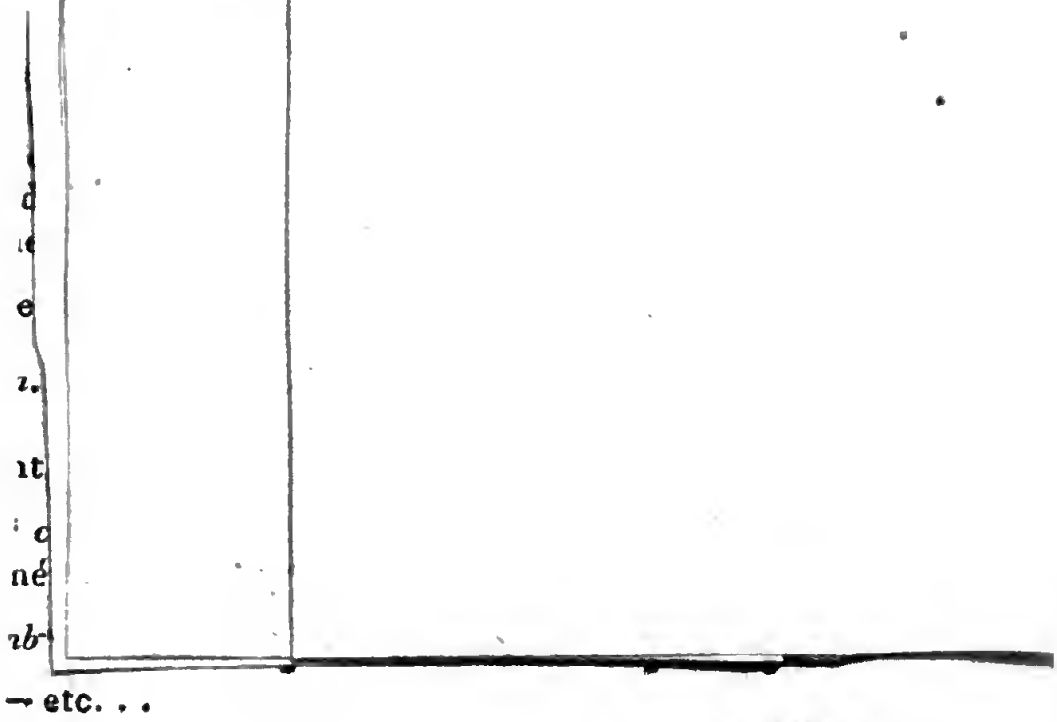
F n'est que le second terme du quotient, lequel s'obtient, suivant les règles ordinaires, en divisant le premier terme du reste précédent E par le premier terme du diviseur A; et la ligne G est le produit de ce terme mis au quotient, multiplié par le diviseur et écrit avec des signes contraires pour faire la soustraction, puis la réduction, sur le dividende précédent E.

etc. . . . (A).

$\cdot 3c^3$
$\frac{}{b^n}$ — etc. .

c. . . . (D).

. (E).



[redacted] la soustraction, puis la réduction, sur le dividende précédent E.

La ligne H présente le second reste de la division. Il s'obtient 1.° en écrivant de suite les lignes E et G, et effaçant le premier terme dans chacune ; 2.° en divisant haut et bas par b^n dans les deux derniers termes de G.

Les lignes I et K simplifient ce second reste H. La première, en opérant sur ses deux premiers termes ; la seconde, sur ses deux derniers ; et leur résultat écrit en L devient le nouveau dividende, d'après lequel, par les règles ordinaires, on trouve le troisième terme du quotient, désigné ici par M.

Ce terme multiplié par le diviseur A et écrit en N avec des signes contraires pour le soustraire du dividende précédent L, donne le troisième reste, savoir $\left(\frac{2n^3-2n}{6}\right) b^{-3} c^3 + n^2 . \frac{-n-1}{2} . \frac{b^{n-3} c^3}{b^n}$ + etc. dans lequel effaçant b^n haut et bas dans le second terme, et faisant les autres opérations indiquées, on trouve $-n . \frac{-n-1}{2} . \frac{-n-2}{3} . b^{-3} c^3$ + etc. désigné ici par P.

Enfin, divisant P par le premier terme du diviseur A, savoir par b^n, on trouve le quatrième terme du quotient Q. Multipliant celui-ci par le premier terme du diviseur (sans passer aux autres termes, si l'on veut s'arrêter au quatrième du quotient), on a un produit qui, écrit en R avec des signes contraires, pour le soustraire de P, donne o pour reste. Donc le quotient qu'on cherche est ici $\frac{1}{b^n} - \frac{n b^{-n-1} c}{b^n} - n . \frac{-n-1}{2} . \frac{b^{-n} c^2}{b^n} - n . \frac{-n-1}{2} . \frac{-n-2}{3} . \frac{b^{-n} c^3}{b^n}$ — etc... qui devient $b^{-n} - nb^{-n-1} . c - n . \frac{-n-1}{2} b^{-n-2} . c^2 - n . \frac{-n-1}{2} . \frac{-n-2}{3} b^{-n-3} c^3$ — etc. en faisant passer b^n du dénominateur au numérateur de chaque terme. Donc enfin $(b+c)^{-n} = b^{-n} - nb^{-n-1} . c - n . \frac{-n-1}{2} . b^{-n-2} c^2 - n . \frac{-n-1}{2} . \frac{-n-2}{3} b^{-n-3} . c^3$ — etc. . .

CHAPITRE III.

De l'extraction des racines.

144. Nous avons déja dit qu'on appelle *racine* cette quantité qui multipliant l'unité a produit la puissance. Ainsi, a est la racine première de a, parce que $1 \times a = a$; la racine seconde de a^2, parce que $1 \times a \times a = a^2$; la racine troisième ou cubique de a^3, parce que $1 \times a \times a \times a = a^3$, etc. Nous avons fait remarquer qu'on désigne une racine par ce caractère $\surd$, dans lequel on écrit l'exposant de la racine, comme $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[n]{}$; et s'il n'y a point d'exposant, le signe radical est censé représenter la racine quarrée.

On appelle *puissance parfaite* d'un degré, celle qui peut donner la racine exacte de ce degré; et *puissance imparfaite* celle où l'on ne peut point trouver cette racine. Ainsi, a^2 est un quarré parfait, a^3 est un cube parfait, a^5 un quarré imparfait.

145. Corolle. Il suit de ce que nous venons de dire, 1.° *que les racines d'un exposant pair peuvent être indifféremment positives ou négatives.* Car $-a \times -a = a^2$, ainsi que $+a \times +a = a^2$; donc la racine quarrée de a^2 pourra aussi bien être $-a$ que $+a$. Il en est de même de toute racine d'un exposant pair. On écrira donc $\pm \surd a$, $\pm \sqrt[4]{b}$, $\pm \sqrt[6]{c}$.

2.° Que les racines *réelles* d'un exposant impair n'admettent qu'un signe, et que ce signe est le même que celui de la puissance. Ainsi $\sqrt[3]{-a^3}$ est $-a$, $\sqrt[5]{a^5}$ est a.

146. Remarques importantes. Quoique $-a^3$ n'ait qu'une racine réelle, savoir $-a$, on n'en doit pas conclure qu'une troisième puissance puisse n'avoir qu'une seule racine; *Car il y a toujours autant de racines, qu'il y a d'unités dans*

dans l'exposant de la puissance. Dans $-a^3$, par exemple, outre la racine réelle $-a$, il y en a deux imaginaires, savoir $\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)a$ et $\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)a$. On pourra se convaincre que ces imaginaires sont les racines cubiques de $-a^3$, parce qu'en les élevant au cube, on trouvera $-a^3$. (Nous parlerons ailleurs de ces sortes de racines).

147. Puisqu'abstraction faite des signes, on forme les puissances d'un monome en multipliant l'exposant de chaque lettre par l'exposant de la puissance (139), il s'ensuit que, pour représenter l'opération contraire, c'est-à-dire, l'extraction des racines, *il faudra diviser l'exposant de chaque lettre par l'exposant de la racine demandée.* Ainsi $\sqrt{a^6}$ pourra être représentée par $a^{\frac{6}{2}}$ ou a^3, $\sqrt[3]{a^{12}}$ par $a^{\frac{12}{3}}$ ou par a^4, $\sqrt[n]{a^m}$ par $a^{\frac{m}{n}}$. D'on l'on conclura en général, qu'*une puissance fractionnaire équivaut à une racine qui aurait le dénominateur de la fraction pour exposant, tandis que le numérateur resterait pour exposant de la quantité.* Ainsi $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a^1}\ldots$ $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}\ldots(a+b)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a+b}$. (*)

(*) La conversion des racines en puissances fractionnaires donne lieu à quelques observations qu'il est utile de rapporter ici pour prévenir des erreurs.

1.° L'imaginaire $\sqrt{-a}$ peut, d'après le principe, prendre la forme $-a^{\frac{1}{2}}$; mais alors il y aurait erreur de substituer à $-a^{\frac{1}{2}}$ le produit des deux facteurs -1 et $a^{\frac{1}{2}}$, parce que ce produit étant réel, une telle transformation altérerait la quantité $-a^{\frac{1}{2}}$, non-seulement dans sa forme, mais dans sa valeur.

2.° La quantité réelle $-\sqrt{a}$ se transforme aussi en $-a^{\frac{1}{2}}$; et alors au lieu de celle-ci, qui représente une quantité réelle, on peut écrire le produit de ses deux facteurs -1 et $a^{\frac{1}{2}}$ qui est également réel.

Ainsi $-a^{\frac{1}{2}}$ est une expression vague qui, par sa forme, peut

148. Pour extraire une racine quelconque d'un polynome, il faut d'abord observer comment se forme la puissance relative à la racine qu'on cherche, afin de pratiquer les opérations contraires. Or, si l'on examine d'abord le quarré du binome $a+b$ ou $-a-b$, qui est $a^2+2ab+b^2$; celui de $a-b$ ou de $-a+b$, qui est $a^2-2ab+b^2$; celui du trinome $a+b+c$ qui est $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$; on trouvera qu'en général *le quarré d'un polynome vaut la somme des quarrés de chaque terme, plus le double produit de chacun multiplié par tous les autres* (*). D'où l'on déduira d'abord la règle suivante pour extraire la racine quarrée binome.

149. Règle. 1.° *Ordonnez la quantité par rapport à une lettre qui soit un quarré parfait*; 2.° *extrayez à la façon des monomes la racine quarrée du premier terme, et l'écrivez à côté*; 3.° *élevez ce premier terme au quarré, et soustrayez-le de la quantité proposée*; 4.° *divisez le premier terme de ce reste par le double de la racine trouvée, et prenez le quotient pour le second terme cherché.*

---

représenter, et l'imaginaire $\sqrt{-a}$ et la quantité réelle $-\sqrt{a}$. La question fixe à laquelle de ces deux significations il faut la rapporter dans chaque cas particulier : il y aurait erreur, si on les confondait.

3.° Quand $-a^{\frac{1}{2}}$ représente l'imaginaire $\sqrt{-a}$, son quarré est *nécessairement* négatif, sans quoi elle ne serait pas une imaginaire du second degré; ce qui est contre l'hypothèse. Il ne faut donc pas chercher alors le quarré en multipliant $-a^{\frac{1}{2}}$ par $-a^{\frac{1}{2}}$; ce qui donnerait $+a$; mais en opérant sur l'exposant; ce qui donne ici $-a^{\frac{1}{2}\times 2}$ ou $-a$.

Au contraire, quand $-a^{\frac{1}{2}}$ représente la quantité réelle $-\sqrt{a}$, son quarré est *nécessairement* positif, savoir $+a$. Il ne peut donc se trouver en multipliant l'exposant $\frac{1}{2}$ par 2, ce qui donnerait $-a$, mais en multipliant $-a^{\frac{1}{2}}$ par $-a^{\frac{1}{2}}$ qui donne $+a$.

(*) Il n'est donc pas possible que le double produit de plusieurs nombres multipliés deux à deux, surpasse la somme de leurs quarrés. Car si $2ab > aa+bb$, le quarré $aa-2ab+bb$ serait négatif; ce qui répugne (90).

150. On demande la racine quarrée du trinome $a^2 - 2ab + b^2$. Je l'écris d'abord comme on le voit ici (ex. I.) ordonné par rapport à la lettre a. Ensuite je dis : la racine quarrée de a^2 est a, que j'écris à côté de la puissance en les séparant par un trait. J'élève a au quarré que j'écris sous la quantité proposée avec le signe — pour l'en soustraire, et avoir le premier reste. Je double le premier terme a en le multipliant par 2, j'écris $2a$ sous la racine, pour diviser par $2a$ le premier terme $-2ab$ du reste, et je mets le quotient $-b$ à la racine, comme devant être le second terme, si la quantité proposée est le quarré d'un binome. Pour m'assurer que cela est ainsi, j'écris encore $-b$ à côté de $2a$, et je multiplie le second terme trouvé $-b$ par $2a - b$; j'en porte le produit $-2ab + b^2$ avec des signes contraires sous le premier reste; et comme, réduction faite, il me vient o, j'en conclus que la racine exacte est $a - b$.

EXEMPLE I.

Quarré.. $a^2 - 2ab + b^2$ | $a - b$ racine

$-a^2$ | $2a - b$

I.er reste. $-2ab + b^2$

$+2ab - b^2$

II.me reste..... o

151. Soit encore (ex. II.) la quantité $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ dont on demande la racine quarrée. L'ayant d'abord écrite en l'ordonnant par rapport à la lettre a, je dis : la racine quarrée de a^2 est a, que j'écris à côté, et le double $2a$ au dessous. Elevant a au quarré, et le soustrayant, j'ai pour premier reste $2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$.

Je divise donc le premier terme de ce reste par $2a$, et j'en écris le quotient b à la racine et au dessous, à côté de $2a$. Je multiplie b par $2a + b$, et en ayant soustrait le produit du premier reste, j'ai pour second reste $2ac + 2bc + c^2$.

Considérant tout ce que j'ai écrit à la racine comme un premier terme, et celui que je cherche comme le second, je double la racine, et j'écris encore par dessous $2a + 2b$.

Je divise toute la partie de ce second reste qui n'est pas un quarré, c'est-à-dire, $2ac+2bc$ par $2a+2b$, ou bien le premier terme de l'une par le premier terme de l'autre. J'écris le quotient c à la racine et à côté du diviseur qui devient $2a+2b+c$, lequel étant multiplié par c, je porte ce produit sous le second reste, avec des signes contraires : comme tout se réduit à 0, j'en conclus que la racine juste est $a+b+c$.

EXEMPLE II.

Quarré.. $a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$ | $a+b+c$ racine.

$-a^2$ | $2a+b$

I.er reste..... $2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$ $2a+2b+c$

$-2ab-b^2$

II.me reste..... $2ac+2bc+c^2$

$-2ac-2bc-c^2$

0

152. Pour extraire la racine des polynomes qui sont des puissances plus élevées, il faut, ainsi que pour le quarré, connaître la manière dont ces puissances sont composées. Or, si l'on examine le cube de $a+b$, qui est $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, on verra que *le cube d'un binome est composé du cube du premier terme de la racine* (a^3); *du triple quarré du premier terme multiplié par le second* ($3a^2b$); *du triple quarré du second, multiplié par le premier* ($3b^2a$), *et du cube du second* (b^3.) *D'où l'on tire la règle suivante pour l'extraction de la racine cubique binome.*

153. RÈGLE. 1.° *Ordonnez la quantité par rapport à une lettre qui soit un cube parfait ; 2.° extrayez à la façon des monomes la racine cubique du premier terme, et l'écrivez à côté comme étant le premier terme de la racine; 3.° élevez ce premier terme au cube, et l'ayant soustrait de la quantité proposée, écrivez le reste au dessous ; 4.° divisez le pre-*

mier terme de ce reste par le triple quarré du premier terme de la racine, et prenez le quotient pour le second terme cherché.

Cube.... $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ } $a+b$ racine cubique.
$-a^3$

I.er reste.... $3a^2b+3ab^2+b^3$
$-3a^2b-3ab^2-b^3$

II.me reste.....0

Soit la quantité $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, dont on cherche la racine cubique. L'ayant ordonnée, comme il paraît ici, je dis : la racine cubique de a^3 est a, que j'écris à côté. Prenant son cube a^3, je le porte avec un signe contraire sous la quantité proposée ; et réduisant ensuite, j'ai pour premier reste $3a^2b+3ab^2+b^3$. Puisque le premier terme de ce reste doit contenir le triple quarré du premier terme de la racine, multiplié par le second, pour avoir ce second, je divise le premier terme de ce reste par le triple quarré de a qui est $3a^2$, et le quotient est b. Pour m'assurer que c'est là le second terme, je prends le triple quarré du premier multiplié par le second ($3a^2b$), le triple quarré du second multiplié par le premier ($3ab^2$), le cube du second (b^3), et je les porte avec des signes contraires sous le premier reste. Comme tous les termes se détruisent, je conclus que $a+b$ est la racine exacte de la quantité proposée.

154 Scolie I. 1.° Si le premier terme de la quantité proposée a un coëfficient numérique, on en extraira la racine à la façon des nombres, comme nous l'enseignerons bientôt.

2.° Si la racine cubique doit être plus que binome, après en avoir trouvé les deux premiers termes par la méthode ci-dessus (153), on cherchera le troisième en considérant les deux termes trouvés comme un premier terme, et celui qu'on cherche comme le second.

3.° On doit voir aussi qu'en considérant la formation des autres puissances du binome (132), on trouvera aisément la méthode d'extraire d'autres espèces de racines.

155. Scolie II. 1.° Avant de quitter cette matière, les commençants doivent s'accoutumer. 1.° A reconnaître par la seule inspection d'une quantité, si elle est une puissance exacte d'un binome, et quel est son degré. (On connaît le degré par les exposants des différents termes, et l'on voit par leur nombre et leur forme (132), si la puissance du binome est exacte). 2.° A compléter des quarrés commencés, ce qui se fait (la quantité étant ordonnée) *en ajoutant le quarré de la moitié du coëfficient du second terme*; ainsi x^2+2x devient x^2+2x+1; $x^6+ax^3+x^2$ devient $x^6+ax^3+x^2+\frac{(a+1)^2}{2}$. 3.° A reconnaître, sans passer par la méthode de l'extraction, quelle est la racine de ces quarrés complétés. Ainsi on est assuré que, dans le premier exemple elle est $x+1$, et dans le second $x^3+\frac{a+1}{2}$.

2.° On remarquera encore, comme une propriété générale, que *si on multiplie la somme de deux nombres* $a+b$, par leur différence $a-b$, *on a pour produit la différence de leurs quarrés* a^2-b^2; et réciproquement, si une expression algébrique contient la différence de deux quarrés a^2-b^2, on est assuré qu'elle résulte de la somme des deux racines $a+b$ multipliée par la différence de ces mêmes racines $a-b$. Ce qui, dans beaucoup de cas, fait trouver sans opération le résultat d'une multiplication ou d'une division proposée.

CHAPITRE IV.

De l'extraction des racines des nombres.

156. LEMME I. *Par quelques caractères qu'un nombre soit exprimé, il n'en peut avoir à son quarré plus que le double; à son cube plus que le triple, etc. de façon que si n désigne combien ce nombre renferme de caractères, sa puissance du degré* p *n'en peut contenir plus que* pn *n'en exprime.*

DEM. Un produit ne peut contenir plus de caractères, qu'il n'y en a en somme dans ses facteurs (24). Or, la racine entre deux fois comme facteur dans le quarré, trois fois dans le cube, et p fois dans la puissance du degré p; donc le quarré ne peut contenir plus que le double des caractères de la racine, le cube plus que le triple, et en général la puissance p plus que pn n'en exprime.

157. COROLL. *Il suit de là qu'un nombre étant proposé, on voit tout de suite combien il doit avoir de caractères à sa racine quelconque.* Par exemple, un nombre exprimé par un ou par deux caractères, n'en peut avoir qu'un à sa racine quarrée; celui qui est exprimé par trois ou par quatre, en aura deux; celui de cinq ou de six, en aura trois à sa racine, et ainsi des autres. De façon *qu'en divisant le nombre proposé en tranches de deux caractères chacune, de sorte que la dernière n'en ait qu'un, si le nombre des caractères est impair, il y aura autant de caractères à la racine quarrée, qu'il se trouvera de ces tranches.*

158. On peut raisonner de même pour la racine cubique. Ainsi un nombre de un, deux ou trois caractères, n'en peut avoir qu'un à la racine cubique : celui de quatre, cinq ou six, n'en peut avoir que deux : celui de sept, huit ou neuf, n'en peut avoir que trois, etc. Pour trouver la

nombre de caractères qui doivent entrer dans la racine cubique, *il ne s'agira donc que de partager le nombre proposé en tranches de trois caractères chacune, de façon que la dernière pourra n'en avoir qu'un ou deux, et il y aura autant de caractères à la racine, qu'il se formera de ces sortes de tranches.*

159. Lemme II. *Si l'on partage un nombre composé de deux caractères (comme 29) en deux parties (20 + 9) dont l'une contienne les dixaines et l'autre les unités, et qu'à la façon d'un binome on l'élève au quarré, on observera, 1.° que le quarré des dixaines formant des centaines, ne peut se trouver dans les deux derniers caractères; 2.° que le double produit des dixaines par les unités laisse une place vers la droite; 3.° que le quarré des unités n'en laisse aucune.*

Ainsi, 29 ou 20 + 9, élevé au quarré à la façon du binome $a + b$ (148) donne 400 + 360 + 81 qu'on peut arranger ainsi.

$$\left\{\begin{array}{r} 4.\,: \\ 36. \\ \quad 81 \\ \hline 841 \end{array}\right\}$$

Or, quand une racine quarrée doit avoir deux caractères, le premier exprime des dixaines par rapport au second. *Il ne faut donc pas chercher le premier caractere de la racine dans les deux derniers du quarré; ni le double produit du premier caractère multiplié par le second, dans le dernier caractère de ce même quarré.*

160. Ces choses étant bien conçues, il sera aisé d'extraire la racine quarrée d'un nombre quelconque. Mais pour cela nous supposons que chacun sait par la table suivante, quels sont les nombres qui n'ont qu'un caractère à leur racine; ensuite nous chercherons les racines à deux caractères, et nous ferons voir que la même méthode peut s'appliquer à la recherche de celles qui en contiennent un nombre quelconque.

Racines . . . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9
Quarrés . . . 1 . 4 . 9 . 16 . 25 . 36 . 49 . 64 . 81.

EXEMPLE. I.

Nombre donné . . . . . 8'41 { 29 racine.
4 { 49
4'41 } 9
4 41 }
0

Ayant écrit (exemple I) le nombre 841, dont on demande la racine quarrée, je le partage en tranches de deux caractères chacune, commençant par la droite (*), de façon que le nombre des caractères étant impair, la dernière tranche n'en contient qu'un. On voit d'abord (158) que ce nombre de tranches détermine le nombre de caractères qu'il y aura à la racine. Ensuite on raisonnera ainsi.

1. Le quarré du premier caractère de la racine ne pouvant se trouver dans la dernière tranche (159), il faut le chercher dans la première qui est 8. Or, le plus grand quarré contenu dans 8 est 4, dont la racine est 2. J'écris 2 à la racine, *et je suis assuré que c'est le nombre des dixaines qu'elle peut avoir.*

2.° J'élève ce premier caractère 2 à son quarré qui est 4, et je l'écris sous 8 pour l'en soustraire. La différence est 4, que j'écris encore au dessous.

3.° A côté de cette différence 4 j'abaisse la tranche suivante 41, ce qui forme le nombre 441, sur lequel je raisonne ainsi : dans ce nombre doit être contenu le double produit du nombre des dixaines de la racine, multiplié

(*) Si l'on formait ces tranches de gauche à droite de cette manière 84, 1, on chercherait le premier caractère de la racine dans un des deux derniers caractères du quarré, ce qui serait absurde (159).

par les unités, plus le quarré de ces unités : d'ailleurs, je sais (159) que le produit du double des dixaines par les unités, ne saurait se trouver dans le dernier caractère. Il faut donc, pour trouver ces unités (29), diviser à part les deux premiers caractères 44, par le double du nombre des dixaines écrit à la racine, c'est-à-dire, par 4, et il vient pour quotient 11.

4.° Il est clair qu'on ne peut écrire à la racine 11, ni même dans aucun cas, plus de 9; (car autrement le caractère précédent n'exprimerait point juste le nombre des dixaines de la racine). J'essaie donc 9, comme étant le nombre à un caractère le plus approché de 11.

5.° Enfin pour savoir si je dois écrire 9, je le multiplie par le double du nombre des dixaines, et je l'élève à son quarré (ce qui se fait à la fois en l'écrivant et à côté et au dessous de 4, pour multiplier 49 par 9). Portant ensuite ce produit sous 441 pour l'en soustraire, je vois qu'il n'y a point de reste, d'où je conclus que la racine quarrée exacte de 841 est 29.

EXEMPLE II.

161. Quarré . . . 28'41'94 | 533 racine

25

	103 Case 1.	1063 Case 2.
Premier reste . . . . . 3'41	3	3
309		
Second reste . . . . . 32'94		
31 89		
Dernier reste 105		

On propose d'extraire la racine quarrée du nombre 284194 (ex. II.) sur lequel j'observe, 1.° que cette racine devant renfermer trois caractères (157), les deux premiers exprimeront un nombre de dixaines, dont le quarré ne peut se trouver dans la dernière tranche (159). C'est pourquoi j'opère d'abord sur les quatre premiers caractères vers la gauche, et comme leur racine doit contenir

deux caractères, je l'extrais ainsi que dans l'exemple précédent, auquel il suffit de renvoyer pour cette partie de l'opération.

2.° Ayant trouvé pour le nombre des dixaines 53, avec un reste 32, j'abaisse à côté de ce second reste la tranche suivante 94, ce qui compose le nombre 3294. Ensuite pour les raisons dites ci-dessus (3.° de 160), je double le nombre 53 écrit à la racine, ce qui donne 106, et je m'en sers pour diviser à part les trois premiers caractères du nombre 3294. Or $\frac{329}{106}=3$; j'essaie donc si 3 doit être écrit à la racine.

3.° Pour m'assurer si 3 est le caractère que je dois écrire à la racine, je l'écris à côté et au dessous de 106 (case 2) prenant le produit de $1063\times 3=3189$, je le porte sous le nombre 3294 pour l'en soustraire. Comme il me vient 105 pour reste, j'en conclus que le nombre proposé contient le quarré de 533, plus 105. Pour m'en convaincre de nouveau, j'élève 533 à son quarré, et le soustrayant du nombre proposé, je trouve pour reste 105. Le scolie suivant va nous apprendre que ce reste n'est pas trop grand, ou bien que la racine ne saurait être 534.

162. Scolie. *Si l'on élève au quarré deux nombres dont le premier surpasse le second d'une unité seulement, le quarré du premier surpassera le quarré du second du double de ce second* $+1$.

Dem. Soit le plus petit nombre $=a$, le plus grand sera $a+1$. Donc le quarré du premier sera a^2, et celui du second a^2+2a+1; leur différence est donc $2a+1$, ce qui exprime que le quarré du plus grand nombre surpasse celui du plus petit, du double de celui-ci $+1$.

163. Corolle. *Si donc après l'extraction de la racine quarrée, il vient un reste plus grand que le double de ce qu'on a écrit à la racine, on peut augmenter celle-ci de* 1; mais on ne le peut point si ce reste n'est pas plus grand que le double de ce qu'on a écrit à la racine, comme dans le dernier exemple.

164. On voit bien que l'on a la racine d'une fraction en extrayant celle du numérateur et du dénominateur. Ainsi $\sqrt{\frac{36}{81}}=\frac{6}{9}$; $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$.

165. On ne donnera point de règles pour extraire les racines cubiques qui ne doivent renfermer qu'un caractère. Il suffit pour cela de recourir à la table suivante, qui contient les cubes de tous les nombres exprimés par un seul caractère.

Cubes...	1	8	27	64	125	216	343	512	729.
Racines...	1	2	3	4	5	6	7	8	9.

166. On peut faire sur les cubes numériques les réflexions suivantes, analogues à celles qu'on a faites sur les quarrés, et les démontrer de même.

1.° Un nombre étant donné, on sait combien de caractères il aura à sa racine cubique (158).

2.° Si à la façon d'un binome (152), on élève au cube un nombre composé de deux parties (20+5) dont l'une contient des dixaines et l'autre des unités; 1.° Le cube des dixaines sera au rang des mille, c'est-à-dire, qu'il laissera trois places après lui vers la droite. 2.° Le triple produit du quarré des dixaines par les unités en laissera deux, etc. (On n'a pas besoin de connaître les places qu'occupent les autres parties du cube pour extraire la racine cubique).

EXEMPLE.

Nombre donné..... 15'683 } 25 racine.
8
7'683 { 12 Case 1.
58

167. On propose d'extraire la racine cubique du nombre 15683. Je le partage d'abord en tranches de trois caractères allant de droite à gauche, de façon que la dernière n'en a ici que deux, et par là je vois que la racine ne peut avoir que deux caractères (158); ensuite je raisonne ainsi:

1.° Le plus grand cube contenu dans 15 est 8, dont la racine est 2. J'écris 2 à la racine, et ce sera le nombre des dixaines (166).

2.° J'élève ce nombre 2 au cube, qui est 8; le portant sous la première tranche 15, je l'en soustrais; et j'ai pour reste 7, à côté duquel j'abaisse la tranche suivante 683, ce qui compose le nombre 7683.

3.° Dans ce nombre 7683 doit se trouver (152) le triple quarré du nombre des dixaines multiplié par les unités, plus le triple quarré des unités, multiplié par les dixaines, plus le cube des unités. Mais pour découvrir ces unités je n'ai besoin que de la première de ces trois parties.

4.° Je sais que le triple quarré du nombre des dixaines, multiplié par les unités, laisse deux places après lui (166); je le cherche donc dans les deux premiers caractères 76 du nombre 7683. Pour trouver ces unités, j'élève 2 à son quarré qui est 4, et son triple sera 12 (Caze 1) dont je me sers pour diviser 76, ce qui donne 6 pour quotient.

5.° Il ne s'agit plus que de prendre une partie convenable de ce quotient. Mais pour la trouver, le moyen le plus simple est de supposer d'abord 6 à la racine et de voir si 26 élevé au cube peut être soustrait du nombre proposé. Or, il ne le peut pas, puisque $(26)^3 = 17576$.

J'y suppose donc 5, et je vois si $(25)^3$ peut être soustrait du nombre proposé; je trouve qu'il le peut, puisque $(25)^3 = 15625$, et qu'il vient pour reste 58, d'où je conclus que 15683 n'est pas un cube parfait, mais que le plus grand cube qu'il contient est celui de 25.

168. On voit assez que si la racine devait contenir d'autres caractères, on les trouverait en abaissant à côté du dernier reste la tranche suivante, et considérant ce qu'on a écrit à la racine comme un nombre de dixaines avec lequel on répéterait les mêmes opérations que nous venons de faire.

CHAPITRE V.

Où l'on expose différentes méthodes d'approximation.

169. LEMME. *Si un nombre contient des décimales, son quarré en contiendra le double, son cube le triple, etc.*

DÉMONSTRATION. Ce nombre entre deux fois comme facteur, pour former le quarré, trois fois pour former le cube. Donc (66) etc.

170. COROLL. Il suit de là *que pour avoir un certain nombre de décimales à une racine, il faut en ajouter le double à son quarré, le triple à son cube, etc.*

171. PROBLÈME I. *On demande un nombre si approché de la racine quarrée de* 284194, *qu'il n'en soit pas éloigné de* $\frac{1}{100}$.

SOL. J'observe d'abord que tout se réduit à faire entrer deux décimales dans la racine, puisque l'erreur ne saurait être alors de $\frac{1}{100}$ (63). Pour y parvenir, j'écris d'abord deux o à la suite du reste 105 déja trouvé (161), et j'ai le nombre 10500, sur lequel opérant à l'ordinaire, je trouve o pour première décimale de la racine. Mettant ensuite deux autres o à la suite de 10500, j'ai 1050000 qui donne 9 à la racine, avec 90519 pour reste. Ainsi 533,09 est la racine quarrée si approchée de 284194, qu'elle ne s'éloigne pas de $\frac{1}{100}$ de la véritable.

EXEMPLE.

Nombre proposé	284194	533,09 racine.
	10500'00	106609
	959481	9
Reste	90519	

172. On voit aisément que, pour approcher d'une racine cubique, il faudrait écrire trois o après chaque reste; et qu'en général quelle que soit la racine indéterminable dont il s'agira, on en peut approcher de telle sorte *que la distance à sa vraie valeur pourra être rendue plus petite qu'un nombre assignable quelconque.*

173. PROBLÈME II. *Trouver la racine quarrée approchée de* $a^2 - x^2$.

SOL. Prenez pour premier terme le plus grand des deux, par exemple a^2, et élevez $a^2 - x^2$ à la puissance $\frac{1}{2}$ par la méthode ci-dessus (138). La racine sera d'autant plus approchée que a sera plus grand par rapport à x; et que la série présentant la puissance $\frac{1}{2}$ renfermera plus de termes.

Je forme donc la suite A que je réduis à A'. Ensuite observant qu'ici le second terme divisé par le premier donne $-\frac{x^2}{a^2}$, je trouve la suite B, qui se réduit à B'.

$$(A).\ \frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{2}-1}{2}, \frac{\frac{1}{2}-2}{3}, \frac{\frac{1}{2}-3}{4}, \frac{\frac{1}{2}-4}{5} \ldots\ldots\ldots$$

$$(A').\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{6}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{10} \ldots\ldots\ldots$$

$$(B).\ a\left(1 - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^4}{8a^4} - \frac{x^6}{16a^6} - \frac{5x^8}{128a^8} - \frac{35x^{10}}{1280a^{10}} - \ldots\ldots\right)$$

$$(B').\ a - \frac{x^2}{2a^1} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \ldots\ldots$$

Cette dernière expression peut encore servir à trouver la racine approchée d'un nombre. Car si l'on demande la racine quarrée de 16, on peut faire $15 = 16 - 1 = a^2 - x^2$. Donc $\sqrt{15} = 4 - \frac{1}{8} - \frac{1}{512} - \frac{1}{65536} - \ldots\ldots$

174. PROBLÈME III. *On demande la valeur aussi approchée qu'on voudra de cette fraction* $\frac{a^2}{a^2 - x^2}$.

SOL. Faites disparaître le numérateur (128) en donnant cette forme $a^2 (a^2 - x^2)^{-1}$; et ayant trouvé la puissance

— 1 de $a^2 - x^2$, multipliez tous les termes par a^2. Or, cette puissance a été trouvée (141)

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} + \frac{x^6}{a^8} + \frac{x^8}{a^{10}} + \ldots\ldots$$

Donc $\frac{a^2}{a^2 - x^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \ldots\ldots$

175. PROBLÈME IV. *On demande une suite infinie qui représente la valeur de la fraction* $\frac{a^2 - x^2}{a^2 - x^2}$.

SOL. J'opère ici comme dans l'exemple précédent, c'est-à-dire (128), que je fais disparaître la fraction en écrivant à sa place $(a^2 - x^2)(a^2 - x^2)^{-1}$. Je n'ai donc qu'à multiplier par $a^2 - x^2$ la suite que j'ai eue pour exprimer la puissance — 1 de $a^2 - x^2$. Or, faisant cette multiplication, et s'arrêtant à la sixième puissance de x, on trouve 1, ainsi qu'on le trouverait par la division ordinaire. Voici le détail de ce calcul.

$$\begin{array}{l} \frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} + \frac{x^6}{a^8} \ldots\ldots \\ a^2 - x^2. \\ \hline \left.\begin{array}{l} 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \ldots\ldots \\ \quad - \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} - \ldots\ldots \end{array}\right\} = 1. \end{array}$$

176. OBSERVATIONS. 1.° Si l'on suppose dans ces exemples que $a = x$, on peut, dans le troisième problème, écrire a pour x, et l'on a $\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ c'est-à-dire, que $\frac{1}{0}$ *doit donner un quotient plus grand que tout nombre assignable.*

2.° Si l'on suppose également dans le quatrième problème $a = x$, le numérateur et le dénominateur de la fraction se réduisent à 0, et l'on a $\frac{0}{0} = 1$.

Nous pouvons donc remarquer déja *des quantités les unes plus grandes, les autres plus petites* (172) *que toute quantité assignable.*

CHAPITRE

CHAPITRE VI.

Du calcul des Radicaux.

177. On appelle *quantités radicales* ou *radicaux* toutes celles qui sont affectées du signe $\surd$. Si elles sont telles que la quantité sous le signe soit une puissance exacte du degré du radical, elle sont appelées *commensurables* : si l'on ne peut qu'approcher de la racine indiquée, sans jamais la trouver exactement, on les nomme *incommensurables* : et si l'extraction de la racine est impraticable, comme il arrive dans les racines paires des quantités négatives, elles sont appelées *imaginaires* ou *impossibles*.

Ainsi $\surd 64$ est une quantité commensurable ; $\surd 2$, $\sqrt[4]{6}$ sont des incommensurables; $\surd -2$, $\surd -6$ sont des imaginaires, sur lesquelles on remarquera que l'extraction de la racine ne peut s'exécuter, et que d'ailleurs, si elle le pouvait, le résultat en serait *inconcevable*, puisqu'il ne pourrait être ni positif, ni négatif, ni zéro (89).

178. Lemme. *On ne change point la valeur d'un radical en multipliant ou divisant son exposant par le même nombre qui multiplie ou qui divise l'exposant des quantités qui sont sous le signe.*

Ainsi, $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[2.6]{a^{4.2}} = \sqrt[\frac{6}{2}]{a^{\frac{4}{2}}} = \sqrt[3]{a^2}$ (*).

179. Problème. I. *Réduire plusieurs radicaux au même exposant, sans changer leur valeur.*

Sol. 1.° Prenez le produit de tous les exposants, et ce

(*) Il est évident qu'en opérant ainsi on fait subir à la quantité qui est sous le radical, deux changements contraires et égaux; donc elle reste la même.

sera l'exposant commun. 2.° Elevez chaque quantité à la puissance désignée par les exposants des autres radicaux.

Ainsi $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[c]{b^d}$, deviennent $\sqrt[nc]{a^{mc}}$, $\sqrt[nc]{b^{dn}}$ (il est évident (178) que la valeur des radicaux n'a pas changé, quoiqu'ils ayent été réduits au même exposant).

Quelquefois, sans toucher à l'exposant d'un des radicaux, on ramène l'autre à sa valeur. Ainsi pour réduire au même exposant $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[6]{a^4}$, je me contente de ramener le dernier à $\sqrt[3]{a^2}$, en divisant par 2 l'exposant du radical et celui de la quantité.

180. PROBLÈME II. *Donner un coèfficient à un radical, sans changer sa valeur.*

SOL. Divisez la quantité qui est sous le signe par ce coèfficient élevé à la puissance que désigne l'exposant du radical.

Ainsi $\sqrt[3]{b^4}$ ayant $2a$ pour coèfficient, devient $2a\sqrt[3]{\frac{b^4}{8a^3}}$. (il est clair que par là $\sqrt[3]{b^4}$ ne change pas de valeur, puisqu'on l'a multipliée et divisée par $2a$).

181. PROBLÈME III. *Oter le coèfficient à un radical, sans changer sa valeur.*

SOL. Faites passer ce coèfficient, comme facteur, sous le radical, en l'élevant à la puissance désignée par l'exposant du radical.

Ainsi $a\sqrt[n]{b}$ devient $\sqrt[n]{a^n b}$; $4\sqrt{2}$ devient $\sqrt{16\times 2}$, ou $\sqrt{32}$.

182. PROBLÈME IV. *Multiplier des radicaux.*

SOL. 1.° Si un des facteurs n'est pas radical, faites-en le coèfficient de l'autre. Ainsi $\sqrt{a^3}\times 2b = 2b\sqrt{a^3}$..... $\sqrt{8}\times 4 = 4\sqrt{8}$.

2.° Si les deux facteurs sont radicaux, réduisez-les d'abord au même exposant (179): multipliez ensuite les quantités qui sont sous le signe, et donnez au produit le radical commun.

Ainsi $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[2]{b^3} = \sqrt[6]{a^4} \times \sqrt[6]{b^9} = \sqrt[6]{a^4 b^9}$.... $\sqrt{4} \times \sqrt{2} = \sqrt{8}$.

Dém. Il faut démontrer que $\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[c]{b^d} = \sqrt[nc]{a^{mc} b^{dn}}$, ce qui doit être ainsi ; car $\sqrt[nc]{a^{mc} b^{dn}} = a^{\frac{mc}{nc}} . b^{\frac{dn}{nc}} = a^{\frac{m}{n}} \times b^{\frac{d}{c}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[c]{b^d}$.

Exemples.

Facteurs	$x-1-\sqrt{-3}$	Facteurs	$1+\sqrt{-3}$
	$x-1+\sqrt{-3}$		$1-\sqrt{-3}$
Produit.	x^2-2x+4	Produit	4

Facteurs	$x+\sqrt{-a}$	Facteurs	$x+\sqrt{-a}$
	$x-\sqrt{-a}$		$x-\sqrt{-a}$
			$x-a$
Produit	x^2+a	Produit	$x^3-ax^2+ax-a^2$

183. Ces exemples démontrent que la multiplication des quantités radicales fait souvent disparaître le radical ; et qu'ainsi *une quantité rationnelle peut avoir des incommensurables et même des imaginaires parmi ses facteurs.*

184. Coroll. On conclura de là, que *toute quantité radicale peut être regardée comme le produit de deux ou de plusieurs radicaux qui ont même exposant.* Ainsi pour $\sqrt{a^2 b}$ on peut écrire $\sqrt{a^2} . \sqrt{b}$, ou $\sqrt{a^2} \times \sqrt{ab}$; de même pour $\sqrt{-ab}$ on peut écrire $\sqrt{-a} . \sqrt{b}$, ou bien $\sqrt{ab} \times \sqrt{-1}$.

185. D'où il s'ensuit *que l'on a la racine d'un produit en prenant les racines de ses facteurs et les multipliant les unes par les autres.* Ainsi $\sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} . \sqrt{b^2} = ab$; $\sqrt{4.9.16} = 2.3.4. = 24$.

S'il arrive donc que les racines de quelques facteurs soient exactes, *on écrira leur produit en forme de coëffi-*

cient devant le produit des autres racines. Ainsi $\sqrt[2]{a^3b}$, devient $\sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{b}$; ou $a\sqrt[3]{b}$; $\sqrt{a^3+a^3b} = \sqrt{a^3} \times \sqrt{1+b} = a\sqrt{1+b}$; $\sqrt{27} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

186. REMARQUE. Cette opération apprend à simplifier un radical, ou bien à faire passer hors du signe, une quantité qui est sous le signe; ce qui ne peut avoir lieu que dans les cas *où la quantité qui est sous le signe a pour facteur une puissance du même degré que le radical.*

187. PROBLÈME V. *Diviser des radicaux.*

SOLUTION. 1.° Si le dividende ou le diviseur ne sont point radicaux, opérez à l'ordinaire. Pour diviser a par $\sqrt[n]{b}$, écrivez $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$; pour diviser $\sqrt[n]{b}$ par a, écrivez $\frac{1}{a}\sqrt[n]{b}$.

2.° Si l'un et l'autre sont des radicaux, reduisez-les d'abord au même exposant, divisez ensuite les quantités à l'ordinaire, et donnez au quotient le radical commun.

Ainsi, en divisant $\sqrt[3]{a^2}$ par $\sqrt{a}$, on a $\frac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[6]{a^3}} = \sqrt[6]{a}$; en divisant $\sqrt[3]{3}$ par $\sqrt[2]{2}$, on a $\frac{\sqrt[6]{9}}{\sqrt[6]{8}} = \sqrt[6]{\frac{9}{8}}$.

DÉMONST. Il faut démontrer qu'en général $\sqrt[n]{a^m}$ divisé par $\sqrt[c]{b^d}$ donne $\sqrt[nc]{\frac{a^{mc}}{b^{nd}}}$. Or, cela est ainsi. Car

$$\sqrt[nc]{\frac{a^{mc}}{b^{nd}}} = \frac{a^{\frac{mc}{nc}}}{b^{\frac{nd}{nc}}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{d}{c}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[c]{b^d}}.$$

188. L'ADDITION et la soustraction des radicaux se font suivant les règles ordinaires. Il faut seulement, dans la soustraction, observer de ne point changer les signes de la quantité qui est sous le radical soustrait, mais seu-

lement le signe qui le précède. Pour soustraire $\sqrt{a^2-2ab}$ de $\sqrt{2a-2b}$, j'écrirai $\sqrt{2a-2b}-\sqrt{a^2-2ab}$.

189. PROBLÈME. VI. *Elever un radical à ses puissances.*

SOLUTION. Sans changer l'exposant du radical, élevez les quantités qui sont avant et après le signe à la puissance demandée.

EXEMPLES. $(2\sqrt[3]{a^4})^2=4\sqrt[3]{a^8}$; $(6\sqrt{2})^2=36.\sqrt{4}=72$.

DÉM. Il est évident que $(d\sqrt[n]{a^m})^p=d^p\times a^{\frac{mp}{n}}=d^p\sqrt[n]{a^{mp}}$.

190. COROLLAIRE. *Quand la puissance demandée est du même degré que la racine, il suffit d'ôter le signe radical.* Ainsi $(\sqrt{a^3})^2=a^3$; $\sqrt{-a})^2$ ou $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=-a$. (*)

191. Il suit de là, que si l'on multiplie deux imaginaires du second degré qui ayent la même quantité sous le signe radical comme $\pm\sqrt{-a}\times\pm\sqrt{-a}$, *leur produit sera négatif, si elles sont précédées du même signe; et positif, si elles sont précédées de signes différents.* Ainsi $+\sqrt{-a}\times+\sqrt{-a}=+(\sqrt{-a})^2=+(-a)=-a$. De même $-\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=+(\sqrt{-a})^2=+(-a)=-a$

Mais $+\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}$ ou $-\sqrt{-a}\times+\sqrt{-a}=-(\sqrt{-a})^2=-(-a)=+a$.

On pourrait encore le prouver, en disant que $+\sqrt{-a}$

(*) Demander quel est le quarré de $\sqrt{-a}$, c'est faire une question qui porte avec elle sa réponse; car ce serait renverser l'hypothèse et admettre une contradiction dans les termes, d'assigner pour quarré de la racine quarrée de $-a$ toute autre quantité que $-a$.

Et si l'on objectait que, d'après le n.° 182, $(\sqrt{-a})^2=\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{+aa}=\pm a$, et non pas $-a$ seulement, on répondrait que ce n'est qu'en thèse générale, et lorsque rien ne détermine si a^2 vient de $+a\times+a$, ou de $-a\times-a$, qu'on peut dire que $\sqrt{aa}=\pm a$. Mais dans le cas présent, l'alternative de $+a$ ou de $-a$ n'a pas lieu pour $\sqrt{aa}$, parce que, d'après l'hypothèse, a^2 vient ici de $-a\times-a$. Il n'y a donc nulle contradiction dans les règles.

$\times + \sqrt{-a} = (+1 \times \sqrt{-a})(+1 \times \sqrt{-a}) = (+1 \times +1)(\sqrt{-a})^2 = 1 \times -a = -a$. On dirait de même que $+\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = (+1 \times -1)(\sqrt{-a})^2 = -1 \times -a = +a$.

192. Remarque. Rien n'empêche de concevoir la double puissance d'un radical, par exemple, la puissance m de $(\sqrt{-b})^n$, ce qui s'écrira ainsi : $\left((\sqrt{-b})^n\right)^m$. Or (189), $(\sqrt{-b})^{nm}$ vaut $\sqrt{-b^{nm}}$. Donc l'expression précédente deviendra $(\sqrt{-b^2})^m$, ou bien $\sqrt{-b^{2m}}$.

Si $n = 2$, $(\sqrt{-b})^n$ devient $-b$. Donc alors $\left((\sqrt{-b})^n\right)^m$ devient $-b^m$, *laquelle expression est réelle toutes les fois que* m *est un nombre entier.*

193. Problème VII. *Extraire les racines des radicaux.*

Sol. 1.° Si le radical a un coëfficient, prenez, s'il se peut, sa racine ; ou bien faites-le passer sous le radical (181).

2.° Si la quantité qui est sous le radical proposé a une racine exacte, extrayez-la à l'ordinaire. Ainsi $\sqrt{(\sqrt[3]{8})} = \sqrt{2}$.

3.° Si la quantité qui est sous le radical proposé ne donne pas de racine exacte, multipliez l'exposant de ce radical, par celui de la racine demandée, et sans toucher au reste, le produit sera l'exposant de la racine cherchée. Ainsi $\sqrt{(\sqrt[3]{a^2})} = \sqrt[6]{a^2}$; $\sqrt[4]{(\sqrt[3]{12})} = \sqrt[12]{12}$.

Dem. Il suffit de démontrer qu'en général $\sqrt{(\sqrt[n]{a^m})} = \sqrt[n]{a^m}$. Or, cela est ainsi ; puisque $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{1}}} = \sqrt{(\sqrt[n]{a^m})}$.

194. On conclura de là, que $\sqrt[nn']{a} = \sqrt[n]{(\sqrt[n']{a})} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[n']{(\sqrt{a})}\right)}$; et qu'en général *au lieu d'un signe radi-*

cal, on en peut mettre plusieurs les uns sur les autres, pourvu que leurs exposants soient les facteurs de l'exposant du premier radical. Ainsi $\sqrt[4]{16} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{16}}$; $\sqrt[6]{8} = \sqrt[2]{(\sqrt[3]{8})}$.

CHAPITRE VII.

De quelques propriétés des imaginaires, et de leur réduction à la forme $m \pm n\sqrt{-1}$.

195. Une quantité radicale ne peut être imaginaire, qu'autant que l'exposant du radical est un nombre pair, et que la somme des quantités qui sont sous le signe est négative. Cette somme peut donc être représentée par $-b$; et comme (86) tout nombre pair résulte du produit d'un nombre impair, par quelque puissance du nombre 2; appelant ce nombre impair quelconque r, je pourrai prendre pour exposant d'un radical imaginaire quelconque, le nomb $r.2^r$. De sorte que $\pm\sqrt[r.2^r]{-b}$ exprimera une racine paire quelconque d'une quantité négative. S'il y a quelque quantité réelle qui précède l'imaginaire, je pourrai la désigner par $\pm a$, et j'aurai $\pm a \pm\sqrt[r.2^r]{-b}$ qui sera en partie réelle et en partie imaginaire.

Or, $\pm\sqrt[r.2^r]{-b} = \pm\sqrt[r.2^r]{+b} \times \sqrt[r.2^r]{-1}$ (184). Désignant donc la quantité réelle $\pm\sqrt[r.2^r]{+b}$ par $\pm n$, je pourrai changer tout radical imaginaire en celui-ci $\pm n\sqrt[r.2^r]{-1}$.

196. Théorème I. *Toute racine paire d'une quantité négative peut être ramenée à une autre racine dont l'exposant est*

un des nombres, 2, 4, 8, 16, *etc. qui sont les puissances successives de* 2; *ou bien* $\sqrt[r.2^p]{} - b$ *peut toujours prendre cette forme* $\sqrt[2^p]{} - n$.

DÉMONST. r étant un nombre impair, $\sqrt[r]{} - b$ représentera toujours une quantité réelle et négative (145), que je peux désigner par $-n$. Je puis donc, sans changer la forme imaginaire, à la place de $\sqrt[r.2^p]{} - b$ écrire $\sqrt[2^p]{}(\sqrt[r]{} - b)$ ou bien $\sqrt[2^p]{} - n$. Donc, etc.

Ainsi $\sqrt[6]{} - a^3 = \sqrt{}(\sqrt[3]{} - a^3) = \sqrt{} - a$. De même $\sqrt[10]{} - a^5 = \sqrt{} - a \ldots \sqrt[12]{} - a = \sqrt[4]{}(\sqrt[3]{} - a) \ldots \sqrt[14]{} - a = \sqrt[2]{}(\sqrt[7]{} - a) \ldots \sqrt[24]{} - a = \sqrt[8]{}(\sqrt[3]{} - a)$.

197. THÉORÈME. II. *Toutes les puissances paires d'une imaginaire monome du second degré sont des quantités réelles; et toutes ses puissances impaires sont des imaginaires de la même forme.*

DÉMONST. 1.° Si t est supposé nombre entier, $2t$ exprimera un nombre pair quelconque : d'ailleurs $\sqrt{} - b$ représente toute imaginaire monome du second degré. Or $(\sqrt{} - b)^{2t}$ peut prendre cette forme $\left((\sqrt{} - b)^2\right)^t$ dans laquelle $(\sqrt{} - b)^2$ vaut $-b$; et $(\sqrt{} - b)^{2t}$ devient $-b^t$, quantité évidemment réelle.

2.° Tout nombre impair peut être représenté par $2t + 1$. Or (184) $(\sqrt{} - b)^{2t+1}$ peut prendre la forme $(\sqrt{} - b)^{2t} \times (\sqrt{} - b)^1$, ou bien, d'après ce qui vient d'être dit, celle-ci $-b^t \times \sqrt{} - b$, qui devient encore (184) $-b^t \times \pm \sqrt{} b \times \pm \sqrt{} - 1$. Si donc je désigne par $\pm n$ le produit des deux facteurs réels $-b^t$ et $\pm \sqrt{} b$, j'aurai $\pm n \sqrt{} - 1$ pour l'expression de toute puissance impaire d'une imaginaire monome du second degré.

198. Scolie. On doit remarquer ici que $\pm n\sqrt{-1}$ élevé à ses puissances paires successives 2, 4, 6, 8, etc. devient $-n^2$, $+n^4$, $-n^6$, $+n^8$, etc. Quel que soit le signe qui précède le radical. Mais $+n\sqrt{-1}$ élevé à ses puissances impaires 1, 3, 5, 7, etc. devient $+n\sqrt{-1}$, $-n^3\sqrt{-1}$, $+n^5\sqrt{-1}$, $-n^7\sqrt{-1}$, etc. Tandis que $-n\sqrt{-1}$ élevé à ces mêmes puissances impaires, devient $-n\sqrt{-1}$, $+n^3\sqrt{-1}$, $-n^5\sqrt{-1}$, $+n^7\sqrt{-1}$, etc. De sorte que si dans un même calcul on avait à prendre la somme de toutes les puissances impaires de $+n\sqrt{-1}$, et de $-n\sqrt{-1}$, ou seules, ou multipliées par les mêmes quantités, on serait assuré que cette somme se réduirait à zéro.

199. Théorème III. *La somme d'un nombre quelconque d'imaginaires monomes du second degré peut être représentée par cette seule imaginaire* $\pm n\sqrt{-1}$.

Dém. $\pm\sqrt{-a}\pm\sqrt{-b}\pm\sqrt{-c}\pm$ etc. $=\pm\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c},\pm$ etc. $\times\sqrt{-1}$. Or, le coëfficient de $\sqrt{-1}$ étant une quantité réelle, je peux le supposer $\pm n$, et j'aurai pour expression de cette somme, $\pm n\sqrt{-1}$.

200. Remarques. I. Il peut arriver que les imaginaires formant des termes semblables, leur somme se réduise à zéro, et alors n sera zéro.

II. S'il arrive qu'on ait des quantités, en partie réelles, et en partie imaginaires, on pourra exprimer la somme des réelles par $\pm m$, et celles des imaginaires par $\pm n\sqrt{-1}$, de sorte que $\pm m\pm n\sqrt{-1}$ *peut représenter la somme d'un nombre quelconque d'imaginaires du second degré, en observant de faire* $m=0$, *s'il n'y a point de terme réel, et* $n=0$, *si les imaginaires se détruisent.*

201. Théorème IV. *Quelle que soit la puissance réelle* p, *à laquelle on élève une imaginaire de la forme* $a\pm\sqrt{-b}$, *elle gardera toujours la même forme.*

Démonst. En observant de prendre a pour le premier

terme, on aura $(a \pm \sqrt{-b})^p = a^p + pa^{p-1}(\pm\sqrt{-b})^1 + \frac{p.p-1}{2}a^{p-2}(\pm\sqrt{-b})^2 + \frac{p\,p-1.p-2}{2.3}a^{p-3}(\pm\sqrt{-b})^3 + \frac{p.p-1.p-2\,p-3}{2.3.4}a^{p-4}(\pm\sqrt{-b})^4 +$ etc. De sorte que $\sqrt{-b}$ sera élevée à toutes ses puissances successives 1, 2, 3, 4, etc. Ainsi les termes où cet exposant sera pair seront des quantités réelles, et ceux où il sera impair seront des imaginaires de la forme $\sqrt{-b}$ (198). On pourra donc exprimer la somme des termes réels par $\pm m$, et celle des imaginaires par $\pm n\sqrt{-1}$. Il faut donc que la puissance prenne la forme $m \pm n\sqrt{-1}$, qui est la même que celle de la racine.

202. Corollaire. Il suit de-là qu'une racine quelconque d'une imaginaire de la forme $a \pm \sqrt{-b}$ doit garder la même forme, puisque $\sqrt[p]{a \pm \sqrt{-b}} = \overline{a \pm \sqrt{-b}}^{\frac{1}{p}}$, qui doit se représenter sous la même forme (201).

203. Remarques. On observera, 1.° que dans la puissance p il n'y a que les termes de rang pair qui restent imaginaires, parce que dans ceux-là seulement le facteur $\pm\sqrt{-b}$ est élevé à des puissances impaires.

2.° Que la somme de deux quantités de cette forme $(a + b\sqrt{-1})^p$ et $(a - b\sqrt{-1})^p$ ne contiendra aucun terme imaginaire, parce que les termes de rang pair seront semblables dans les deux suites et auront des signes contraires, puisque tout le reste étant égal, une racine contient $+ b\sqrt{-1}$, et l'autre $- b\sqrt{-1}$. Ainsi les termes imaginaires se détruiront et la somme sera réelle.

204. Problème. *On demande à quelles conditions on peut réduire* $\sqrt[4]{-a}$ *à la forme* $m \pm n\sqrt{-1}$.

Solution. Supposons que cela soit fait et que nous ayons $\sqrt[4]{-a} = m \pm n\sqrt{-1}$; en élevant à la quatrième puissance, on aura $-a = m^4 + 4m^3 n\sqrt{-1} - 6m^2 n^2 -$

$4mn^3\sqrt{-1}+n^4$. Or, le premier membre étant une quantité réelle, il faut que le second le soit, et qu'ainsi les termes imaginaires se détruisent. La première condition sera donc que $4m^3n\sqrt{-1}=4mn^3\sqrt{-1}$, ou bien que $m=n$. 2.° Il faut qu'on ait ensuite $-a=m^4-6m^2n^2+n^4$, ce qui donne $4m^4=a$, ou $m=\sqrt[4]{\frac{a}{4}}$.

On pourra donc toujours réduire $\sqrt[4]{-a}$ à la forme $m\pm n\sqrt{-1}$, en observant ces deux conditions : 1.° Que $m=n$; 2.° que $m=\sqrt[4]{\frac{a}{4}}$.

205. THÉORÈME V. *Toute racine paire d'une quantité négative peut être ramenée à cette forme* $m\pm n\sqrt{-1}$; m *et* n *étant des quantités réelles.*

DÉMONST. Suivant ce que nous avons vu (196) toute racine paire d'une quantité négative peut être représentée par $\sqrt[2^p]{-a}$. Or, sans changer de valeur, l'exposant 2^p peut prendre cette forme $2^2\times 2^{p-2}$ qui se réduit à $4\times 2^{p-2}$. Donc $\sqrt[2^p]{-a}$ se peut présenter ainsi : $\sqrt[4.2^{p-2}]{-a}$, ou bien encore (194) ainsi : $\sqrt[4]{\left(\sqrt[2^{p-2}]{-a}\right)}$. Or (147), à la place de $\sqrt[2^{p-2}]{-a}$, je puis supposer $-a^{\frac{1}{2^{p-2}}}$. Donc j'aurai $\sqrt[4]{-a^{\frac{1}{2^{p-2}}}}$, ou bien (189) $\left(\sqrt[4]{-a}\right)^{\frac{1}{2^{p-2}}}$. Mais (204) en supposant $m=n=\sqrt[4]{a}$, à la forme $\sqrt{-a}$ on peut substituer $m\pm n\sqrt{-1}$. Donc j'aurai $(m\pm n\sqrt{-1})^{\frac{1}{2^{p-2}}}$, laquelle puissance (201) garde toujours la même forme. Donc toute racine paire d'une quantité négative, etc.

206. COROLLAIRE. Il suit de-là *qu'une racine quelconque d'une quantité en partie réelle et en partie imaginaire, telle que* $\sqrt[2^p]{(b\pm\sqrt{-a})}$ *peut être ramenée à la forme* $n\pm m\sqrt{-1}$.

Car $\pm \sqrt[2n]{-b}$ peut prendre cette forme $c \pm d\sqrt{-1}$ (205); et après ce changement nous aurons $\sqrt[n]{a+c \pm d\sqrt{-1}}$; ou bien en faisant $a+c=m, d=n$, il viendra $\sqrt[n]{m \pm n\sqrt{-1}}$; qui doit garder la forme $m \pm n\sqrt{-1}$ (201), dans laquelle m et n sont réelles.

SECTION III.

Des raisons, proportions, progressions et logarithmes.

CHAPITRE PREMIER.

Propriétés générales des raisons.

207. DÉFINITION. On entend par raison, *le rapport de grandeur de deux quantités, dont l'une est ou peut être supposée partie de l'autre*; et par partie, nous entendons *une petite quantité comparée à une plus grande du même genre*. Les deux quantités comparées se nomment les *termes* de la raison; et pour distinguer ces termes, le premier est appelé *antécédent*, et le second *conséquent*. On les écrit l'un à côté de l'autre, en les séparant par deux points, de cette manière $a : b$, ce qui s'énonce ainsi *la raison de* a *à* b.

208. Il y a des quantités que nous ne saurions concevoir sous le rapport de tout et de partie; comme, par exemple, une toise et une heure, un nombre réel et un nombre imaginaire, une ligne et une surface, un nombre abstrait et un nombre concret, une quantité positive et une négative, le fini et l'infini, etc. On ne peut donc pas établir une raison entre ces quantités; ce qui prouve,

qu'outre des *incommensurables*, il faut reconnaître des *incomparables* parmi les quantités.

209. Une même quantité, comparée avec des quantités inégales, ne saurait avoir avec elles les mêmes raisons ou rapports de grandeur; ainsi 9, par exemple, étant plus grand par rapport à 1, que par rapport à 3, les deux raisons de 9 : 1 et de 9 : 3 ne sauraient être égales. Cela suffit pour faire conclure 1.° Que les raisons sont susceptibles d'augmentation et de diminution, *et qu'ainsi elles sont de vraies quantités*. 2.° Que, sous ce rapport, elles peuvent être mesurées, comparées entre elles, et assujetties à des méthodes de composition et de résolution. 3.° Enfin, qu'elles admettent, comme les autres espèces de quantités, les rapports d'opposition *plus* et *moins*, et qu'ainsi, il faut les distinguer en *positives et négatives*. Or, nous prouverons plus bas (221), que le rapport de *majorité* qu'a une grande quantité avec une petite, et le rapport de *minorité* qu'a une petite avec une grande, sont tels que leur addition se change en soustraction, et réciproquement; ce qui fait le caractère essentiel de l'opposition. Donc, si les raisons de majorité sont positives, celles de minorité seront négatives; et la raison d'*égalité*, qui est le passage des unes aux autres, ne pouvant dès-lors être conçue ni positive ni négative, sera nécessairement o, conformément à la définition donnée ci-dessus (207) (*).

Les anciens ont appelé raison d'*inégalité majeure* celle où l'antécédent est plus grand que le conséquent; par exemple, la raison de 9 : 3, que nous appelons raison de *majorité* : ils ont appelé *raison d'inégalité mineure*, celle où l'antécédent est plus petit que le conséquent, par exemple, la raison de 3 : 9, que nous appelons rai-

(*) Entre deux quantités égales a et b, il n'y a point de raison suffisante pour que a soit supposée partie de b, plutôt que b partie de a; donc aucune d'elles ne peut être supposée partie de l'autre; par conséquent, il n'existe point de raison proprement dite ou rapport de grandeur entre elles (Voyez disc. prél. n.° XXIII).

son de *minorité*: ils ont désigné par raison d'*égalité* (qui n'en est pourtant point une proprement dite), celle où les deux termes sont égaux ; telle serait la raison de 9 : 9.

210. AXIOME. *Des quantités qui ont même raison ou rapport de grandeur avec une troisième, sont égales entre elles.* Par exemple, si $Q : 1 = q : 1$, on a $Q = q$.

211. THÉORÈME. *Si l'on considère les termes de deux ou de plusieurs raisons comme des nombres abstraits, et qu'on les divise les uns par les autres, dans le même ordre, les quotients égaux indiqueront des raisons égales ; et réciproquement.*

DÉMONST. 1.° Si l'on a ces deux raisons $a : b$, $c : d$, et que, considérant les termes de chacune comme des nombres abstraits, on ait $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on en conclura que $a : b = c : d$. (*). Car appelant Q le quotient de $\frac{a}{b}$, on a aussi Q pour celui de $\frac{c}{d}$. Or, par la nature de la division, $a : b = Q : 1$ et $c : d = Q : 1$. Donc $a : b = c : d$.

2.° Si $a : b = c ; d$, on en conclura que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Car appelant Q le quotient de $\frac{a}{b}$ et q celui de $\frac{c}{d}$, on aura $a : b = Q : 1$, et $c : d = q : 1$; donc $Q : 1 = q : 1$; et par conséquent $Q = q$ (210) ou bien, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

212. COROLLAIRE I. *Les quotients que donnent les termes des raisons, divisés dans le même ordre, sont donc des indices de l'égalité ou de l'inégalité de ces raisons.* Il est indifférent quel des deux termes on divise par l'autre, pourvu qu'on observe le même ordre dans chaque division (**).

(*) Ce qui s'énonce ainsi : la raison de a à b égale la raison de c à d.

(**) Nous prouverons plus bas (220) que la raison de 16:1 egale deux fois celle de 4:1, ou bien que la première est double de la se-

II, $a : b = an : bn$, puisqu'en divisant les antécédents par les conséquents, le quotient dans la première est $\frac{a}{b}$ et dans la seconde $\frac{an}{bn}$ ou $\frac{a}{b}$ Pareillement $a : b = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}$; puisque l'un et l'autre quotient est $\frac{a}{b}$. *On ne change donc pas la valeur d'une raison en multipliant ou divisant ses deux termes par la même quantité.*

213. D'où l'on conclura 1.° *que la raison qui règne entre deux quantités qui ont un facteur commun, est la même que celle qui règne entre les deux facteurs non communs*, ou bien que $an : bn = a : b$. Or, n pouvant désigner un entier ou une fraction, an et bn peuvent exprimer des équimultiples ou des équi-sous-multiples de a et de b. Ainsi, *deux quantités sont en même raison, que leurs équi-multiples ou leurs équi-sous-multiples quelconques.*

214. 2.° *Que sans changer de valeur, toute raison peut être réduite à avoir l'unité pour un de ses termes.* Ainsi $a : b$, en divisant ses deux termes par b, devient $\frac{a}{b} : 1$. De même $c : d$, en divisant par c, devient $1 : \frac{d}{c} = c : d$; ce qui fait voir que *le rapport qu'a l'unité avec une fraction quelconque* (lequel peut s'exprimer $1 : \frac{d}{c}$) *égale celui du dénominateur de la fraction à son numérateur.*

215. 3.° Que si l'on a une suite quelconque de raisons $a : b$, $c : d$, $e : f$, on pourra, sans en changer la valeur (214), les présenter sous cette forme $1 : \frac{b}{a}$, $1 : \frac{d}{c}$, $1 : \frac{f}{e}$. Or, ici en multipliant les deux termes de chaque raison par les

---

conde. Cependant le quotient de $\frac{15}{4}$ est quadruple de celui de $\frac{5}{4}$. Donc, *quoique des quotients inégaux indiquent des raisons inégales, on n'en peut pas conclure que les raisons varient ainsi que les quotients.*

conséquents de celles qui la précèdent vers la gauche, on a cette suite de raisons, savoir : $1 : \frac{b}{a}, \frac{b}{a} : \frac{bd}{ac}, \frac{bd}{ac} : \frac{bdf}{ace}$, dans laquelle suite le conséquent de chaque raison sert d'antécédent à la suivante.

216. Scolie. Toute quantité déterminée, et par conséquent une raison, peut être considérée comme étant parvenue de o à une valeur fixe, par des accroissements successifs. Ainsi (*) 9:6 peut être supposée avoir été d'abord 9 : 9 ou o (et alors elle est dans son *origine*) : ensuite avoir reçu un premier accroissement, en devenant 9:8; un second, en devenant 9:7; un troisième en devenant 9:6; (et alors elle est parvenue à son *terme*). On dira donc que la raison de 9:6 est une quantité qui peut être considérée comme ayant commencé lorsque son conséquent est supposé 9, et étant devenue complète, lorsqu'il est supposé 6 : ou bien qui a son *origine* au nombre 9 égal à l'antécédent, et son *terme* au nombre 6 égal au conséquent (il en est de même de toute autre raison).

217. Lorsque plusieurs quantités sont liées de telle sorte que le terme de l'une est l'origine de celle qui la suit immédiatement, elles sont *continues*; et elles sont *discrètes*, s'il y a entre elles des intervalles vides (disc. prél. n.° VIII). Ainsi les raisons 9:6, 6:5, 5:2, 2:1 sont continues, puisque le conséquent de chacune sert d'antécédent à la suivante. Et celles-ci 9:6, 5:3, 2:1 seront discrètes. *On peut donc toujours* (215) *présenter une suite de raisons discrètes, sous la forme de raisons continues, sans changer leur valeur*(**).

(*) N'oubliez pas qu'il faut s'énoncer de cette manière : *La raison de 9 à 6 peut être supposée avoir été d'abord la raison de 9 à 9*, etc.

(**) Pour que les raisons soient continues, peu importe qu'elles soient égales ou inégales, pourvu que le conséquent de chacune serve d'antécédent à la suivante. On se fait donc une fausse notion de cette *continuité*, en la bornant au seul cas des raisons égales, formant alors une progression ou bien une proportion continue.

CHAPITRE

CHAPITRE II.

Qui contient les méthodes de composition et de résolution des raisons, avec la manière de les mesurer.

218. DÉFINITION. *Une raison est dite composée de toutes celles dont elle est la somme.* Par exemple (*), si $9:1=9:6+6:3+3:1$, on dira que la première est composée de toutes les autres.

Si les raisons composantes sont égales, la composée devient *multiple* de chacune d'elles en particulier; savoir, double, triple, quadruple, s'il n'y entre que deux, trois, quatre raisons égales. Dans ce cas, les géomètres appellent la raison composée *doublée*, *triplée*, *quadruplée* de chacune des composantes; et celles-ci sont appelées des raisons *sous-doublées*, *sous-triplées*, *sous-quadruplées*, par rappport à la composée.

Addition des raisons.

219. RÈGLE. *Prenez le produit des antécédents et celui des conséquents, et la raison du premier produit au second vaudra la somme des raisons données.*

DÉMONSTRATION. Il faut démontrer que $a:b+c:d+e:f=ace:bdf$. (**) Pour cela, changez les raisons données en raisons continues (215), et elles

(*) Pour rendre cet exemple intelligible, il faut s'énoncer ainsi: si la raison de 9 à 1 égale la raison de 9 à 6, plus celle de 6 à 3, plus celle de 3 à 1, on dira, etc.

(**) Dites ainsi : il faut démontrer que la raison de a à b, plus celle de c à d, plus celle de e à f égale la raison de ace à bdf. On insiste sur cette manière de s'énoncer, parce qu'elle n'est pas familière à la plupart des lecteurs, et qu'ici elle importe à la clarté.

deviendront $1 : \frac{b}{a} + \frac{b}{a} : \frac{bd}{ac} + \frac{bd}{ac} : \frac{bdf}{ace}$. Or, *dans une suite de quantités continues, où le terme de chacune devient l'origine de la suivante, la somme doit être une quantité de la même espèce, qui commence à l'origine de la première, et finit au terme de la dernière.* Ainsi la somme de ces raisons sera la raison de $1 : \frac{bdf}{ace}$ ou bien celle de $ace : bdf$ (214).

220. COROLLAIRE. Il suit de là, 1.° *que la raison qu'il y a entre deux produits est composée de celles qui sont entre leurs produisants*, puisque $ace : bdf = a : b + c : d + e : f$.

2.° *Que la raison entre deux quarrés est doublée de celle qui se trouve entre leurs racines;* puisque $a^2 : b^2 = a : b + a : b$; et qu'ainsi la raison entre les cubes est *triplée :* qu'entre les quatrièmes puissances, elle est *quadruplée*, de celle qui se trouve entre les racines, etc.

3.° *Que dans une suite de raisons continues, la raison du premier terme au dernier est composée de toutes les raisons de la suite.* Ainsi dans les raisons de 9:6, 6:4, 4:2, on a celle de 9 : 2 valant la somme de toutes les autres raisons.

221. SCOLIE. On observera ici que l'addition des raisons fournit une nouvelle preuve de ce que nous avons dit plus haut ; savoir, que les raisons de *majorité* sont opposées à celles de *minorité*. Car dans la composition, l'effet des unes est d'augmenter, et celui des autres est de diminuer la raison à laquelle on les ajoute ; ce qui est le vrai caractère des quantités opposées : et puisque la raison d'*égalité* ajoutée à une autre, ne l'augmente ni ne la diminue, on en conclura encore que sa valeur est o.

Soustraction des raisons.

222. RÈGLE. *Renversez les termes de la raison soustraite, et l'ajoutant à celle dont il faut la soustraire, vous aurez la différence cherchée.*

DÉMONSTRATION. Pour soustraire $c:d$ de $a:b$, je dis qu'il faut écrire $a:b+d:c$, et que la vraie différence est $ad:bc$. En effet, on est sûr d'avoir la vraie différence de deux quantités, lorsqu'en l'ajoutant à la quantité soustraite, on retrouve l'autre. Or, $ad:bc+c:d=adc:bcd=a:b$. Donc, etc.

223. COROLLAIRE. Il suit de là que $a:b=a:1-b:1$; c'est-à-dire, que *la raison qu'il y a entre deux nombres, vaut l'excès de la raison de l'antécédent à l'unité, sur la raison du conséquent à l'unité :* et réciproquement, *connaissant les raisons que deux nombres* a *et* b *ont avec l'unité, on connaît la raison qu'il y a entre eux*, puisque $a:1-b:1=a:b$.

Multiplication et division des raisons.

224. On ne peut multiplier ou diviser une raison que par un pur nombre absolu ou abstrait (20). Or, pour multiplier $a:b$ par 3, il faut la tripler; et pour la diviser par 3, il faut en prendre le tiers. Dans le premier cas, il faut donc prendre la somme de ces trois raisons $a:b+a:b+a:b$ qui est $a^3:b^3$. Si on eût multiplié $a:b$ par 4, on aurait eu pour produit $a^4:b^4$. Si on l'eût multipliée par le nombre n, on aurait eu $a^n:b^n$. D'où il suit qu'en général, *pour multiplier une raison par un nombre absolu quelconque, il faut élever ses deux termes à la puissance désignée par ce nombre ;* et qu'ainsi pour la diviser, *il faut extraire de chaque terme la racine désignée par le nombre qui sert de diviseur ;* puisque la division doit décomposer ce que la multiplication compose.

225. Une raison est *multiple* d'une autre, quand elle contient cette autre un certain nombre de fois juste. Ainsi la raison de $a^3:b^3$ est triple de $a:b$, parce que $a^3:b^3$ contient trois fois $a:b$. De même celle de $a^2:b^2$ est double de celle de $\sqrt{a^2}:\sqrt{b^2}$; triple de $\sqrt[3]{a^2}:\sqrt[3]{b^2}$. *Il faut donc, pour qu'une raison soit multiple d'une autre, que les*

termes de la première soient les mêmes puissances des termes correspondants de la seconde. Par exemple, $a^3 : b^3$ est triple ou triplée de $a : b$; parce que les termes de la première sont les cubes des termes correspondants de la seconde. De même $a^2 : b^2$ est doublée de $a : b$, quadruplée de $\sqrt{a} : \sqrt{b}$.

226. On ne peut mesurer les raisons qu'en prenant une raison pour unité de mesure, et s'en servant ensuite pour déterminer la valeur des autres. Or, dans ce cas, chaque raison mesurée sera nécessairement multiple de celle qui sert d'unité (que j'appelle le *module*); et par conséquent les termes de l'une seront formés des termes correspondants de l'autre, élevés à la même puissance. Par exemple, dans les nombres, si l'on prend la raison de 10:1 pour unité de mesure, il faut que, dans toutes les raisons commensurables à cette unité, l'antécédent soit une puissance exacte de 10 et le conséquent une même puissance de 1. Ainsi 100:1 pourra être mesurée par ce module, parce que 100 est le quarré de 10 et 1 est le quarré de 1; et elle vaudra 2 fois l'unité de mesure; il en sera de même de 1000:1, qui vaudra 3 fois l'unité de mesure. Mais toute autre raison, par exemple, celles de 9:1 ou de 8:1 ou de 99:1, ne saurait être mesurée ainsi, parce que, dans celles-là, les antécédents ne sont pas des puissances exactes de 10.

227. De là on conclura, *qu'en adoptant un certain système*, c'est-à-dire, *prenant une raison déterminée pour module, la plupart des autres raisons seront incommensurables.* Par exemple, si l'on voulait mesurer les raisons que les divers nombres ont avec l'unité, et qu'on prît pour module la raison de 10:1, il n'y aurait que celles dont l'antécédent serait une puissance exacte du nombre 10, qui fussent commensurables, c'est-à-dire, exactement déterminables d'après ce module, bien qu'elles le fussent d'après un autre. *On pourrait donc exprimer par un nombre combien de fois celles de la première espèce contiennent*

l'unité de raison ; mais aucun nombre ne saurait exprimer exactement combien de fois celles de la seconde espèce contiennent cette unité, du moins dans le même système.

CHAPITRE III.

Des Proportions.

228. L'ASSEMBLAGE de deux raisons égales forme une *proportion* entre les quantités qui composent ces raisons. On les écrit de cette manière $4 : 8 = 3 : 6$, ou bien de celles-ci $4 : 8 :: 3 : 6$; $4. 8 :: 3. 6$; ce qui signifie, 4 est à 8, comme 3 est à 6. Le premier et le dernier terme d'une proportion sont appelés les *extrêmes*, et les deux autres les *moyens*. Si les deux raisons sont continues, la proportion est dite *continue* ; et si les raisons sont discrètes, elle est *discrète*. Dans la proportion continue, le terme qui sert de conséquent à la première raison et d'antécédent à la seconde est appelé *moyen proportionnel*. Cette espèce de proportion s'écrit ainsi $\div\div 2 : 4 : 8$.

229. THÉORÈME FONDAMENTAL. *S'il y a proportion entre quatre quantités, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, et réciproquement.*

DÉMONSTRATION. 1.° Si l'on a la proportion $a : b :: c : d$, je dis que $ad = bc$. Car s'il y a proportion entre ces quatre quantités, la première raison égale la seconde (228), ou bien $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (211). Donc, en multipliant des deux côtés par ac, on aura $bc = ad$.

2.° La réciproque est, *que si quatre quantités* a, b, c, d *sont arrangées de façon que le produit des extrêmes égale le produit des moyens*, c'est-à-dire, *de façon que* $bc = ad$, *elles forment la proportion* a : b :: c : d. Car si $ad = bc$,

en divisant tout par ac, on a $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$. Donc la raison de a à b égale celle de c à d (211), ou bien (228) $a : b :: c : d$.

230. COROLLAIRE I. On peut donc faire une équation de toute proportion, en prenant le produit des extrêmes pour un membre, et celui des moyens pour l'autre. Et réciproquement, toute équation peut être convertie en proportion, en faisant les extrêmes *des deux racines d'un membre*, et les moyens *des deux racines de l'autre*.

231. II. Puisque $ad = bc$ donne $a = \frac{bc}{d}$ et $d = \frac{bc}{a}$, il s'ensuit que *dans toute proportion, un extrême quelconque est égal au produit des moyens, divisé par l'autre extrême.* De même puisque $ad = bc$ donne $b = \frac{ad}{c}$ et $c = \frac{ad}{b}$, il s'ensuit encore qu'*un moyen quelconque est égal au produit des extrêmes, divisé par l'autre moyen.*

232. III. *Dans toute proportion continue le moyen proportionnel vaut la racine quarrée du produit des extrêmes.* Car dans $\therefore a : b : c$, on a $b^2 = ac$ et $b = \sqrt{ac}$. D'où il suit que pour avoir une quantité moyenne proportionnelle entre deux autres, *il faut multiplier ensemble les racines quarrées des deux premières.*

233. IV. Puisque $ad = bc$ donne $a : b :: c : d$, on voit que dans deux produits égaux les racines ou facteurs (qu'on peut toujours réduire à deux dans chacun) sont *en raison réciproque.*

234. V. S'il y a proportion entre quatre quantités, elle subsistera de quelque façon qu'on les arrange, pourvu que les moyens de la première combinaison soient tous les deux moyens ou tous les deux extrêmes dans les autres. Ainsi, admettant une fois que $a : b :: c : d$, ces quatre quantités pourront être combinées de huit façons, sans détruire la proportion.

I	$a : b :: c : d$	$b : a :: d : c$ V	*Invertendo.*
Alternando. II	$a : c :: b : d$	$b : d :: a : c$ VI	
III	$d : c :: b : a$	$c : a :: d : b$ VII	
IV	$d : b :: c : a$	$c : d :: a : b$ VIII	

Il est évident que de la première proportion, on peut conclure chacune des sept autres combinaisons, puisqu'on a toujours $ad = bc$.

De toutes ces différentes manières d'argumenter par proportion, les anciens n'ont donné un nom qu'à la seconde et à la cinquième. Ils en ont ajouté cinq autres, dont voici la combinaison.

Si $a : b :: c : d$, on peut conclure :

Componendo .... $a + b : b :: c + d : d$

Dividendo ..... $a - b : b :: c - d : d$

Convertendo .... $a + b : a :: c + d : c$

Ex æqualitate — Si { $a : b :: c : d$; *Ordinata* ... $b : e :: d : f$ }

On conclut ..... $a : e :: c : f$

Ex æqualitate — Si { $a : b :: d : f$; *deordinata* ... $b : e :: c : d$ }

On conclut ..... $a : e :: c : f$

235. Théorème II. *Si on a une suite de raisons égales comme* $a : b = c : d = e : f$, *la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent quelconque est à son conséquent, ou bien* $a + c + e : b + d + f :: a : b$.

Démonstration. Il suffit (229) pour le prouver, de faire voir que $ab + bc + be = ab + ad + af$, ou bien ôtant ab des deux parts, que $bc + be = ad + af$. Or, cette égalité a lieu ici, puisque $a : b = c : d$ donne $ad = bc$, et que $a : b = e : f$ donne $be = af$.

236. COROLLAIRE. *On ne change pas la valeur d'une raison, en ajoutant à ses deux termes les termes correspondants d'autres raisons égales à celle-là.* Puisque dans $a : b = c : d = e : f$, on a $a + c + e : b + d + f = a : b$. Il en serait de même, si on eût soustrait les termes des deux dernières raisons des termes correspondants de la première.

237. THÉORÈME III. *Si l'on multiplie ou si l'on divise par ordre les termes de deux proportions, les produits ou les quotients formeront une proportion.*

DÉMONST. 1.° Si l'on a $\left\{\begin{matrix} a : b : c : d \\ e : f : g : h \end{matrix}\right\}$, je dis que l'on aura $ae : bf :: cg : dh$. Pour cela, il suffit qu'on ait (229) $adeh = bcfg$. Or, cette dernière égalité a lieu, puisque par la première proportion, $ad = bc$, et par la seconde $eh = fg$. (L'autre partie du théorème se démontre de même).

238. THÉORÈME IV. *Les mêmes puissances ou les mêmes racines des quantités proportionnelles, sont encore en proportion.*

DÉMONSTRATION. Il faut démontrer que si l'on a, $a : b :: c : d$, on aura $a^n : b^n :: c^n : d^n$, ou bien $a^n d^n = b^n c^n$; ce qui est évident; puisque $a : b :: c : d$ donne $ad = bc$, et partant $a^n d^n = b^n c^n$. Mais n pouvant exprimer non-seulement une puissance, mais aussi une racine, en devenant fractionnaire (147), la proposition est démontrée pour les deux cas.

239. S'il faut renverser les termes d'une raison pour qu'elle soit égale à celle qu'on lui compare, la première est dite *l'inverse* ou la *réciproque* de la seconde. Ainsi, puisque 8 : 4 devient égale à 3 : 6 en renversant les termes de l'une ou de l'autre, on dira 8:4 égale l'inverse de 3:6, qui est 6 : 3; ou bien que 8 est à 4 inversement comme 3 est à 6.

240. COROLLAIRE. *Pour avoir l'inverse d'une raison donnée, il suffit de mettre ses deux termes en fraction sous*

la même quantité. Ainsi, l'inverse de $a : b$ sera $\frac{m}{a} : \frac{m}{b}$, ou bien on aura $a : b = \frac{m}{b} : \frac{m}{a}$. Car $\frac{m}{b} : \frac{m}{a} = \frac{ma}{ab} : \frac{mb}{ab} = ma : mb = a : b$. D'où l'on conclut *que deux quantités* a *et* b *qui sont en raison inverse de deux autres* c *et* d, *deviennent en raison directe avec celles-ci, en mettant les termes de l'une ou de l'autre raison en fraction sous la même quantité;* c'est-à-dire qu'ici $a : b = \frac{m}{c} : \frac{m}{d}$, ou bien $a : b :: d : c$.

241. THÉORÈME V. *Si la quantité* Q *dépend des quantités* R, S, T, *de telle sorte que si une seule varie,* Q *varie dans le même rapport, je dis que si toutes varient à la fois et deviennent* r, s, t; *tandis que* Q *devient* q, *on aura* $Q : q :: RST : r s t$.

DÉMONSTRATION. Supposons que, dans le premier changement R seul étant changé en r, Q devienne E, on aura par l'hypothèse, $Q : E :: R : r$. Si, dans le second changement, S devenant s, E devient F, on aura $E : F :: S : s$. et si, dans un troisième la valeur de T se change en t, et celle de F en q, on aura $F : q :: T : t$. Donc en multipliant par ordre ces trois proportions, on aura (237) $Q\,E\,F : q\,E\,F :: RST : rst$, ou bien $Q : q :: RST : rst$.

242 SCOLIE. 1.° Il faut observer ici, que cette proportion n'est vraie qu'autant que les quantités R, S, T, sont tellement indépendantes entre elles, que chacune puisse varier, sans que les autres varient. Car, si R par exemple ne pouvait changer sans que S et T changeassent dans le même rapport, on aurait, $Q : q :: R \pm S \pm T : r \pm s \pm t$, ou bien (235) $Q : q :: R : r :: S : s :: T : t$.

2.° Dans le cas du théorème précédent Q est dit être directement comme R S T, et si l'on avait eu $Q : q :: \frac{RST}{VX} : \frac{rst}{ux}$, on dirait que Q est directement comme R S T, et inversement comme V et X.

CHAPITRE IV.

De la Règle de Trois, et de ses différentes applications.

LA propriété générale des proportions énoncée ci-dessus (231), a donné lieu à une règle fameuse en arithmétique, connue sous le nom de *Règle de Trois* ou de *Règle d'Or*. Cette règle est *directe* ou *inverse*, *simple* ou *composée*. Les exemples suivants la feront comprendre dans tous les cas.

243. *Exemple de la Règle de Trois simple et directe.* Un homme a dépensé 18 fr. en quatre jours, combien dépensera-t-il à proportion dans un an, ou dans 365 jours.

Pour le savoir, faites la proportion suivante, $4^{\text{jours}} : 365^{\text{jours}} :: 18 \text{ fr.} : x = \frac{365 \times 18 \text{ fr.}}{4} = 1642 \text{ fr. } 50 \text{ c.}$

244. *Exemple de la Règle de Trois simple et inverse.* 6 ouvriers font un ouvrage en 20 jours, en combien de jours 15 ouvriers auraient-ils fait le même ouvrage ?

Il est évident, par la nature de la question, que *le nombre des jours doit être en raison inverse de celui des ouvriers*, Ainsi l'on dira en comparant les choses semblables, $20^{\text{jours}} : x^{\text{jours}} :: 15^{\text{ouvr.}} : 6^{\text{ouvr.}}$. Donc $x = \frac{6 \times 20}{15} = 8^{\text{jours}}$.

245. *Exemple de la Règle de Trois composée.* 20 ouvriers ont fait 99 mètres d'un ouvrage en 15 jours ; combien en feront 60 ouvriers en 25 jours ?

Il y a ici cinq choses connues, qui peuvent cependant se réduire aux trois termes d'une proportion, en observant que la quantité de l'ouvrage doit être directement comme le nombre des ouvriers et comme le temps qu'ils

ont travaillé ; et qu'ainsi il faut multiplier (241) le nombre des jours par le nombre des ouvriers, et l'on aura :

$$20^{\text{ouvr.}} \times 15^{\text{j.}} : 60^{\text{ouvr.}} \times 25^{\text{j.}} :: 99 \quad : x^{\text{m.}} = 495^{\text{m.}}.$$

246. Problème. *Couper la quantité* a *en parties proportionnelles aux quantités* c, d, e *dont la somme* = b.

Solution. Puisque deux quantités sont entre elles comme leurs parties semblables quelconques (213), on aura $b:a :: \left\{ \begin{array}{l} c : \frac{ac}{b} \\ d : \frac{ad}{b} \\ e : \frac{ae}{b} \end{array} \right\}$; ce qui désigne que, pour partager une quantité *a* en parties proportionnelles aux parties *c*, *d*, *e* d'une autre quantité *b*, *il faut multiplier successivement* a *par chaque partie de* b, *et la diviser par* b.

247. Remarque. S'il eût fallu diviser la quantité *a* en parties proportionnelles, non-seulement aux quantités *c*, *d*, *e*, mais encore aux quantités *f*, *g*, *h* ; il aurait fallu faire des rapports composés en multipliant (241) les termes correspondants des deux suites, savoir *c*, *d*, *e* par *f*, *g*, *h* ; et il serait venu *cf*, *dg*, *eh*, dont la somme étant *s*, on aurait opéré comme ci-dessus en faisant

$$s:a :: \left\{ \begin{array}{l} cf : \frac{cf \times a}{s} \\ dg : \frac{dg \times a}{s} \\ eh : \frac{eh \times a}{s} \end{array} \right\} ;$$

c'est sur cela qu'est fondée la Règle de Compagnie, tant simple que composée.

248. *Exemple de la Règle de Compagnie simple.* Trois marchands ont fait un fonds de 3500 fr. La mise du premier a été de 1700 fr. ; celle du second de 1000 fr., et celle du troisième de 800 fr. ; ils ont gagné ensemble

1750 fr. On demande ce qu'il doit en revenir à chacun, en proportion de sa mise.

On voit qu'il s'agit ici de diviser le profit en parties proportionnelles aux trois mises, et qu'ainsi ce n'est que l'application de la règle précédente. La part du premier sera donc $\frac{1750 \text{ fr.} \times 1700}{3500} = 850$ fr.; celle du second sera $\frac{1750 \text{ fr.} \times 1000}{3500} = 500$ fr. et celle du troisième $\frac{1750 \text{ fr.} \times 800}{3500} = 400$.

249. *Exemple de la Règle de Compagnie composée.* Supposons qu'aux conditions de l'exemple précédent, on ajoute que la première mise a resté dans le fonds pendant 12 mois, la seconde pendant 8 mois, et la troisième pendant 5 mois. Il est clair que *le profit qui doit revenir à chaque associé, est en raison composée de la valeur de sa mise et du temps qu'elle a resté dans le fonds* (241). Il faut donc commencer par multiplier chaque mise par le nombre de mois qu'elle a travaillé, et l'on aura pour la 1.ère 20400 fr., pour la 2.e 8000, pour la 3.me 4000, dont la somme = 32400. Il ne reste donc qu'à couper le profit 1750 fr. en parties proportionnelles à ces quantités, ce qui donnera :

Pour la 1.ère mise	$1101 \frac{69 \text{ fr.}}{81}$.
Pour la 2.me	$432 \frac{8 \text{ fr.}}{81}$.
Pour la 3.me	$216 \frac{4 \text{ fr.}}{81}$.
Total	1750 fr.

250. *Exemple de la Règle de fausse position.* On demande un nombre dont la moitié, le tiers et le quart, ajoutés ensemble, donnent 39.

Je suppose d'abord que le nombre cherché est 12. Or, la moitié, le tiers et le quart de 12, savoir $6 + 4 + 3$, ne

font que 13. Ainsi, cette supposition est fausse ; et cependant elle va me faire trouver, par une règle de trois, le nombre que je cherche ; en observant que 13 doit être à 12, dont il contient la moitié, le tiers et le quart ; comme 39 est au nombre inconnu, dont il doit contenir de semblables parties ; ou bien que $13:12::39:x=36$. Le nombre cherché est donc 36, dont en effet la moitié, le tiers et le quart, savoir $18+12+9=39$. On n'entrera pas dans un plus grand détail sur toutes ces règles d'arithmétique, parce que la plupart des questions qui s'y rapportent, peuvent se résoudre d'une manière plus simple par l'analyse ; ainsi que nous le prouverons plus bas, en traitant de cette partie de l'algèbre.

CHAPITRE V.

Des Progressions géométriques.

251. DÉFINITION. *On entend par progression géométrique une suite de quantités formant des raisons égales, dans lesquelles le conséquent de chacune sert d'antécédent à la suivante.* On la distingue par ce caractère ∴ qu'on met en tête, et on sépare les termes par un point. Ainsi les nombres suivants ∴ 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . etc. forment une progression géométrique. On l'énonce ainsi : 2 est à 4, comme 4 est à 8, comme 8 est à 16, comme 16 est à 32.

252. COROLLAIRE I. De cette définition, on peut conclure : 1.° *Que dans la même progression, le même nombre doit servir d'indice à toutes les raisons qui la composent* (212), *et qu'ainsi on peut le faire partout* $= m$.

2.° Que si le premier terme est a, et que pour connaître la valeur de l'indice, on divise chaque conséquent par son antécédent, le second terme (29) sera am ; le 3.me am^2 : le 4.me am^3 ; et par analogie celui du rang n sera am^{n-1}.

Mais a peut représenter un premier terme quelconque, et m un indice quelconque. Donc la progression $\div\div a . am^1 . am^2 . am^3 . am^4 .$ etc *peut être regardée comme une formule générale qui représente toute sorte de progressions géométriques.*

253. COROLLAIRE II. Si l'on suppose que $m = 1$, tous les termes seront égaux. Si $m > 1$, la progression sera *croissante* ou *divergente*. Si $m < 1$, la progression sera *décroissante* ou *convergente*. Ici nous la supposons croissante, et pour appliquer à l'autre ce que nous dirons de celle-là, il suffira de renverser les formules que nous trouverons, ou bien de renverser les progressions décroissantes auxquelles on les appliquera.

254. COROLLAIRE III. En considérant la progression qui nous sert de formule, on voit, 1.° que connaissant la valeur d'un terme, avec celle de l'indice m; et le nombre n des termes que doit renfermer la progression, on peut la continuer à droite et à gauche du terme connu aussi loin qu'on voudra.

2.° Que connaissant le premier terme a, l'indice m, et le nombre des termes n, on a la valeur du dernier terme, que j'appelle t, en faisant $t = am^{n-1}$.

3.° Et qu'en général, on a la valeur d'un terme quelconque Q, pourvu qu'on sache quel est son quantième N, en faisant $Q = am^{N-1}$. Donc réciproquement, connaissant un terme quelconque avec m et N, on aura le premier terme a, en faisant $a = \frac{Q}{m^{N-1}}$.

Si à la place de a, j'avais un autre terme quelconque q dont le quantième serait n, j'aurais eu $Q = qm^{N-n}$; donc alors $m^{N-n} = \frac{Q}{q}$, et $m = \sqrt[N-n]{\frac{Q}{q}}$; c'est-à-dire, que connaissant deux termes quelconques Q et q avec leurs quantièmes N et n, *on aura l'indice de la progression, en divisant le plus grand par le plus petit, et extrayant du quotient la racine désignée par la différence de leurs quantièmes.*

4.° On peut par là insérer un nombre quelconque de moyens proportionnels entre deux nombres donnés. Si l'on en demande deux entre 3 et 81, je cherche d'abord la valeur de m, et pour cela j'observe que la différence des quantièmes de 3 à 81 est ici 3, puisque l'un est le premier et l'autre le quatrième. Ainsi l'indice m sera $\sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$. Donc le premier moyen proportionnel sera $3 \times 3 = 9$; le second sera $9 \times 3 = 27$, et la progression se présentera ainsi $\div\div 3 . 9 . 27 . 81$.

255. Théorème I. *Dans toute progression géométrique, la raison du premier terme au troisième est doublée de celle qui règne dans la progression : celle du premier au quatrième est triplée : celle du premier au cinquième est quadruplée de cette raison commune, et ainsi des autres.*

Démonstration. La raison du premier terme au troisième contient deux raisons égales à la raison commune (220) : celle du premier au quatrième en contient trois : celle du premier au cinquième en contient quatre. Il faut donc (218) que la raison du premier au troisième soit doublée, que celle du premier au quatrième soit triplée, etc. de la raison commune.

On prouvera de même que la raison qu'il y a entre deux termes, dont la différence des quantièmes est n, sera n^{plie} de celle qui règne dans la progression.

256. Corollaire. *Dans toute progression, le premier terme est au troisième, comme le quarré du premier est au quarré du second ; au quatrième, comme le cube du premier au cube du second, etc.*

257. Théorème II. *Une suite de quantités* a, b, c, d, *dont les différences successives sont proportionnelles à ces mêmes quantités, forme une progression géométrique.*

Démonstration. Il faut démontrer que si $a-b : b :: b-c : c :: c-d : d$, on a $\div\div a . b . c . d$. Or, 1.° puisque $a-b : b :: b-c : c$, on aura, en multipliant les extrêmes et les

moyens, $ac - bc = b^2 - bc$, et effaçant $- bc$ de chaque membre $ac = b^2$; ce qui donne $\div\div a. b. c.$ 2.° Puisque $b - c : c :: c - d : d$, on a aussi $bd - cd = c^2 - cd$, et réduisant $bd = c^2$, d'où l'on déduit $\div\div b. c. d.$; donc $\div\div a. b. c. d.$

258. Scolie. On peut appliquer aux progressions ce que nous avons déja dit des proportions, c'est-à-dire, qu'en ajoutant ou soustrayant les termes voisins d'une progression, en les élevant à la même puissance, ou en en extrayant la même racine ; en multipliant ou divisant les termes d'une progression, par les termes correspondants d'une autre, la progression n'est point détruite, quoique la raison soit changée.

259. Théorème III. Pour avoir la somme d'une progression géométrique croissante, il faut, 1.° *multiplier le dernier terme par le nombre qui sert d'indice, et soustraire le premier terme de ce produit* ; 2.° *Diviser cette différence par l'indice commun diminué de l'unité.*

C'est-à-dire, supposant la somme $= s$, l'indice $= m$, le dernier terme $= t$, et le premier $= a$, on aura $s = \frac{mt-a}{m-1}$.

Démonstration. Dans une progression, tous les termes sont antécédents, excepté le dernier, et tous sont conséquents, excepté le premier. Donc la somme des antécédents est $s - t$, et celle des conséquents est $s - a$. Mais dans une suite de raisons égales, la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent quelconque est à son conséquent : ou bien ici $s - t : s - a :: a : am :: 1 : m$. Donc $sm - mt = s - a$, et transposant dans le premier membre tous les termes affectés de s, on a $sm - s = mt - a$, ou bien $s \times m - 1 = mt - a$; donc en divisant chacune de ces quantités égales par $m - 1$, on a $s = \frac{mt-a}{m-1}$, c'est-à-dire, etc.

260. Remarque. Si l'on veut appliquer cette formule à une

une progression décroissante, il sera plus simple de la renverser en la présentant de cette manière $s = \frac{a-mt}{1-m}$.

261. Corollaire I. Si n désigne le nombre des termes de la progression décroissante, il désignera aussi le quantième du dernier terme, qui sera par conséquent am^{n-1}. Substituant cette valeur pour t dans la formule, elle devient $s = \frac{am^n-a}{m-1}$. Et si alors la progression commence par l'unité, ou si $a = 1$, la formule devient $s = \frac{m^n-1}{m-1}$.

Donc, 1.° Si $m = 2$, $s = 2^n-1$; 2.° Si $m = 3$, $s = \frac{3^n-1}{2}$, etc.

262. Corollaire II. La formule $s = \frac{a-mt}{1-m}$ devient $s = \frac{a}{1-m}$ lorsque le dernier terme est o; parce qu'alors $mt = o$, et c'est ce qui arrive lorsqu'on dit d'une progression qu'elle décroît à *l'infini*.

Nous concluons de là que si $\div\div \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b^2} \cdot \frac{a}{b^3}$ ..... représente une progression de cette espèce qui décroît toujours, parce que le numérateur est constant, et que le dénominateur croît, *la somme sera égale au premier terme, dont le dénominateur aura été diminué de l'unité, ou bien* $s = \frac{a}{b-1}$.

Car $S = \frac{\frac{a}{b}}{1-\frac{1}{b}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{b-1}{b}} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{b-1} = \frac{ab}{b^2-b} = \frac{a}{b-1}$.

Ainsi $S \div\div \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdots \frac{1}{\infty} = 1$.

$S \div\div \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{27} \cdots \frac{1}{\infty} = \frac{1}{2}$.

$S \div\div \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000} \cdots \frac{1}{\infty} = \frac{1}{9}$.

263. Remarque. On doit observer ici que la somme d'une progression géométrique, dont les termes vont seulement en doublant, croît avec beaucoup plus de rapidité qu'on ne l'imagine. Nous en apporterons pour exemple le problème suivant, qui a été tiré de l'Encyclopédie, au mot Progression, et dans lequel, outre qu'on a vérifié tous les calculs, on a ajouté quelques déterminations à celles qu'a données l'auteur de cet article.

Problème. Un philosophe de l'Inde inventa le jeu des échecs pour amuser son roi en l'instruisant. Le prince trouva cette découverte si belle, qu'il pressa l'auteur de demander une récompense à son choix. Le philosophe, après s'en être longtemps défendu, se fit apporter un échiquier, et dit au prince : ordonnez, seigneur, qu'il me soit délivré un grain de blé pour la première case, deux pour la seconde, quatre pour la troisième, et toujours en doublant jusqu'à la soixante-quatrième. On cherche ici combien de blé il faut pour satisfaire à cette demande, qui parut d'abord très-modeste.

Solution. 1.° Il est clair (261) qu'ici la somme des grains de blé est exprimée par $2^{64}-1$; ce qui donne le nombre A.

A. 18,446,744,073,709,551,615.

2.° Un pouce cube de blé contient 450 grains, et par conséquent un pied cube en contient le nombre B.

B. 777,600.

3.° En divisant le nombre A par le nombre B, on sait combien il y a de pieds cubes de blé dans A, et l'on trouve le nombre C.

C. 23,722,664,703,844.

4.° Dans une enceinte quarrée dont le circuit serait d'une lieue commune de France ou de 2400 toises, et dans laquelle le blé s'éleverait partout à la hauteur de 20

pieds, il y tiendrait un nombre de pieds cubes de blé exprimé par D.

D. 259,200,000.

5.° Divisant donc C par D, on trouvera combien il faut de greniers de cette espèce, pour contenir tout le blé demandé. Or, ce nombre de greniers est 91522, avec 162,303,844 pieds cubes de reste; lequel reste suffirait, ajoute l'auteur de cet article, pour faire la fortune de 6000 honnêtes familles; et l'on peut dire que ce philosophe avait fait une demande si énorme, que tous les potentats de l'Europe ne pourraient y satisfaire, en y employant, pendant 100 ans, tout leur revenu.

CHAPITRE VI.

Des raisons, proportions et progressions arithmétiques.

264. DÉFINITION. *Si l'on compare ensemble deux quantités pour connaître leur différence, on établit entre elles une nouvelle espèce de rapport qui est appelé raison arithmétique.* Il faut bien la distinguer de la raison proprement dite, qui, par opposition à celle-ci, est appelée *raison géométrique;* et qui seule détermine le vrai rapport de grandeur qu'il y a entre les quantités.

On voit par la définition de la raison arithmétique, que sa valeur doit s'estimer en soustrayant une des quantités comparées de l'autre; et qu'ainsi la raison arithmétique de 3 à 5 égale celle de 7 à 9. C'est cette égalité de deux raisons qui établit une *proportion arithmétique,* qu'on écrit de ces trois manières indifféremment 3.5:7.9, 3.5.·.7.9, 3—5=7—9, et qu'on énonce ainsi : 3 est *arithmétiquement* à 5, comme 7 est à 9.

265. THÉORÈME FONDAMENTAL. *Dans toute proportion arithmétique la somme des extrêmes est égale à celle des moyens, et réciproquement.*

DÉMONSTRATION. 1.° Si l'on a, $a.b.\div.c.d$, on a par la définition de la proportion $b-a=d-c$. Donc, ajoutant $a+c$ de chaque côté de l'égalité, et réduisant, on aura $b+c=a+d$. ou bien, etc.

2.° La réciproque est que si quatre termes a, b, c, d, sont arrangés de façon que la somme des extrêmes $a+d$ égale celle des moyens $b+c$, on aura la proportion $a.b.\div.c.d$. Car, puisque $a+d=b+c$, en soustrayant de part et d'autre $a+c$, on aura $d-c=b-a$. Donc la raison arithmétique de a à b égale celle de c à d (264), ou bien $a.b.\div.c.d$.

266. COROLLAIRE. De là on déduira ces conséquences analogues à ce que nous avons dit plus haut pour la proportion géométrique :

1.° *Toute proportion arithmétique peut fournir une équation, et réciproquement.* Cette réciproque est fondée sur ce que chaque membre d'une équation peut être réduit à deux parties liées par les signes + ou —.

2.° *Dans toute proportion arithmétique, un extrême est égal à la somme des moyens, moins l'autre extrême* $a=b+c-d$; *et un moyen est égal à la somme des extrêmes moins l'autre moyen* $b=a+d-c$.

3.° De là il suit que si la proportion arithmétique est continue, comme $\div a.b.c$, un extrême est égal au double du terme moyen, moins l'autre extrême, ou $a=2b-c$; et le terme moyen est égal à la moitié de la somme des extrêmes, ou $b=\frac{a+c}{2}$.

267. THÉORÈME I. *On peut prendre pour formule générale de toute progression arithmétique celle-ci* $\div a.a\pm d.a\pm 2d.a\pm 3d.a\pm 4d.a\pm 5d.$, etc.

DÉMONSTRATION. Une progression arithmétique quelconque est une suite de quantités qui, prises consécutivement, ont une même différence. Or, la suite dont

il s'agit renferme des quantités qui, prises consécutivement, donnent la même différence $\pm d$. D'ailleurs, la valeur indéterminée des lettres leur permet de représenter des quantités quelconques. Donc c'est là une formule générale de toute progression arithmétique.

268. COROLLAIRE I. A l'inspection de la formule, on voit, 1.° que si la différence est positive ou $+ d$, le second terme $a + d$ est plus grand que le premier a; et qu'ainsi la progression est croissante (le contraire arrivera si la différence est négative).

2.° Que connaissant un terme quelconque avec la différence commune, on peut continuer la progression à droite et à gauche de ce terme à l'infini.

269. COROLLAIRE II. Comparant ensemble deux termes quelconques de la formule (que nous supposons croissante pour une plus grande clarté), on voit que *le plus grand terme égale le plus petit, plus la différence commune multipliée par la différence de leurs quantièmes.* Ainsi le cinquième ($a + 4d$) vaut le troisième ($a + 2d$), plus la différence (d) multipliée par 2; ou bien $a + 4d = a + 2d + d(5 - 3)$; et que le plus petit des deux termes comparés égale *le plus grand, moins la différence commune, multipliée par la différence de leurs quantièmes.* Car le troisième $a + 2d =$ le cinquième $a + 4d - d(5 - 3)$. Si la progression était décroissante, il faudrait soustraire la différence commune, pour avoir le plus grand terme, et l'ajouter pour avoir le plus petit.

270. COROLLAIRE III. Il suit de là que faisant le plus grand des deux termes comparés $= Q$, son quantième $= m$; le plus petit $= q$, son quantième $= n$, on aura $Q = q + d \times \overline{m - n}$. Donc $d = \frac{Q-q}{m-n}$: c'est-à-dire, que *connaissant deux termes de la progression avec leurs quantièmes, on aura la différence commune en divisant l'excès du plus grand sur le plus petit, par la différence de leurs quantièmes.*

Par là on voit, 1.° que connaissant deux termes quelconques avec la valeur de leurs quantièmes, on pourra continuer la progression. 2.° On insérera aisément des moyens proportionnels arithmétiques entre deux termes donnés. Par exemple, qu'il en faille insérer 4 entre 1 et 21, on dira, par la formule, $d = \frac{21-1}{6-1} = \frac{20}{5} = 4$. Donc le premier moyen proportionnel $= 1 + 4 = 5$; le second $= 5 + 4 = 9$; le troisième $= 9 + 4 = 13$; le quatrième $= 13 + 4 = 17$; et la progression entière sera $\div$ 1 . 5 . 9 . 13 . 17 . 21.

271. Scolie. Il faut remarquer que si les différentes puissances d'une même quantité forment une proportion ou une progression géométrique, leurs exposants formeront une proportion ou progression arithmétique. Ainsi dans $a^2 : a^4 :: a^6 : a^8$, on a 2 . 4 :: 6 . 8. dans $\div\div a^0 . a^2 . a^4 . a^6 . a^8$, on a $\div$ 0 . 2 . 4 . 6 . 8.

272. Théorème II. *Dans toute progression arithmétique la somme des extrêmes égale celle de deux termes quelconques également éloignés des extrêmes, ou le double du terme moyen, si le nombre des termes est impair.*

Démonstration. Cette égalité se trouve dans la formule générale (267); elle doit donc avoir lieu dans tous les cas particuliers.

273. Corollaire I. Il suit de là qu'écrivant ainsi ces deux progressions, $\ldots \begin{cases} \div a . a \pm d . a \pm 2d . a \pm 3d . a \pm 4d . \\ \div \ a \pm 4d . a \pm 3d . a \pm 2d . a \pm d . a \end{cases}$ dont l'une n'est autre chose que l'autre renversée; on forme, en prenant les termes correspondants, une suite de quantités égales $(2a \pm 4d)$, dont le nombre est le même que celui des termes de la progression, que j'appelle n. Donc leur somme sera $n(2a \pm 4d)$. Et appelant s la somme d'une des deux progressions, on a $s = \frac{n}{2}(2a \pm 4d)$, c'est-à-dire, *que la somme de tous les termes d'une progression arithmé-*

tique est égale à la somme des extrémes, ou de deux termes quelconques également éloignés des extrémes, multipliée par la moitié du nombre des termes; ou bien *au terme du milieu, multiplié par le nombre entier des termes, lorsque ce nombre est impair.* (Lorsque le nombre des termes est impair, la somme des extrèmes fait un nombre pair, et réciproquement. Alors pour éviter les fractions, il est plus simple de prendre la somme de la progression en multipliant le terme moyen par le nombre entier des termes).

274. COROLLAIRE III. On a donc la somme de la suite naturelle des nombres partant de l'unité, comme ÷ 1. 2. 3. 4. etc. *en prenant la moitié du dernier nombre, plus la moitié de son quarré.* Car alors le dernier terme désigne le nombre de ceux qui sont dans la progression. Donc la formule devient $s = \overline{1+n} \times \frac{n}{2} = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$. Ainsi la somme des cent premiers nombres est . . . . $\frac{100}{2} + \frac{10000}{2} = 5050$.

275. Dans la progression des premiers nombres impairs ÷ 1. 3. 5. 7. etc. le dernier vaut le double du nombre des termes, moins l'unité, ou $2n-1$. Donc $s = \overline{1+2n-1} \times \frac{n}{2} = n^2$, c'est-à-dire, qu'*alors la somme égale le quarré du nombre des termes.* Ainsi la somme des cent premiers nombres impairs est 10000.

Réciproquement, connoissant une somme de premiers nombres impairs qui commencent à l'unité, il suffit d'en extraire la racine quarrée, pour savoir combien il y entre de ces nombres; puisque $s=n^2$ donne $n=\sqrt{s}$. Or, comme ces sommes forment les quarrés 1, 4, 9, 16, 25, il s'ensuit que le premier quarré contient un des premiers nombres impairs, que le second en contient 2, le troisième 3, etc.

CHAPITRE VII.

De la sommation des différentes puissances des termes d'une progression arithmétique.

POUR parvenir à sommer les termes d'une progression arithmétique, dont chacun est élevé à une puissance donnée, il faut d'abord faire les observations suivantes.

276. 1.° Si on a la progression arithmétique croissante $\div a.b.c.d.e$, dont la raison arithmétique soit r, il est clair que l'on aura $b = a + r$, $c = b + r$, $d = c + r$, $e = d + r$. Donc en élevant toutes ces équations au quarré, on aura :

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + 2ar + r^2 \\ c^2 &= b^2 + 2br + r^2 \\ d^2 &= c^2 + 2cr + r^2 \\ e^2 &= d^2 + 2dr + r^2 \end{aligned}$$

prenant la somme de toutes ces équations, et effaçant les termes égaux des deux côtés, ce qui ne saurait détruire l'égalité, on a $e^2 = a^2 + (a + b + c + d)\,2r + 4r^2$.

2.° Elevant les mêmes équations au cube, et prenant leur somme, on trouvera celle-ci $e^3 = a^3 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,3r + (a + b + c + d)\,3r^2 + 4r^3$; et enfin si on les élève à la quatrième puissance, on trouvera $e^4 = a^4 + (a^3 + b^3 + c^3 + d^3)\,4r + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,6r^2 + (a + b + c + d)\,4r^3 + 4r^4$.

277. Si l'on fait la somme des premières puissances des termes donnés $= s'$ (*), leur nombre $= n$, et le dernier terme $= t$, il est évident qu'on aura, en vertu de la première équation, $t^2 = a^2 + (s' - t)\,2r + (n-1)\,r^2$. Donc en *transposant* (**) et divisant tout par $2r$, on aura pour

(*) Pour s', s'', dites *s prime*, *s seconde*.

(**) *Transposer*, c'est faire passer un terme d'un membre d'équation à l'autre membre, ce qui se fait en changeant son signe, sans que par là on détruise l'égalité entre les deux membres.

formule de sommation des premières puissances $s^{I} = \frac{t^{2} - a^{2} - (n+1)\, r^{2}}{2r} + t$.

278. Faisant ensuite, dans cette supposition, la somme des quarrés $= s^{II}$, on aura pour la seconde équation, $t^{3} = a^{3} + (s^{II} - t^{3})\, 3r + (s^{I} - t)\, 3r^{2} + (n-1)\, r^{3}$. Donc la formule pour la somme des quarrés sera $s^{II} = \frac{t^{3} - a^{3} - s^{I} + t \times 3r^{2} - n + 1 \times r^{3}}{3r} + t^{2}$: par un semblable calcul on trouverait une formule pour la sommation des cubes, et de toute autre puissance.

279. COROLLAIRE. Il suit de là, 1.° que si la progression $\div\ a.\ b.\ c.\ d.\ e.$, etc. est formée par la suite naturelle des nombres, commençant à l'unité, on aura (274) $\left\{ \begin{array}{l} t = n \\ a = 1,\ s^{I} - t = \frac{n^{2} - n}{2} \\ r = 1 \end{array} \right\}$. Donc en substituant ces nouvelles valeurs, la formule des quarrés sera . . . . . $s^{II} = \frac{2n^{3} + 3n^{2} + n}{6}$.

2.° Que si le nombre des termes de la suite naturelle commençant à l'unité est *infini*, alors t et n sont infinis. Donc tous les termes doivent s'effacer dans la valeur de s^{I}, excepté t^{2}, qui devient ∞^{2} (l'infini se désigne par ce caractère ∞) (*). Donc la formule se changera ainsi : $s^{I} = \frac{\infty^{2}}{2} = \frac{1}{2} \infty \times \infty$.

280. Pareillement dans la valeur de s^{II} il ne restera que $\frac{\infty^{3}}{3}$. Donc $s^{II} = \frac{\infty^{3}}{3} = \frac{1}{3} \infty^{2} \times \infty$. Or, ici ∞ désigne le nombre des termes, et $\frac{1}{3} \infty^{2}$ désigne un tiers du dernier

(*) Nous prouverons plus bas que le fini ne peut, ni augmenter ni diminuer l'infini par addition ou par soustraction : il en est de même d'une puissance inférieure de l'infini par rapport à une supérieure.

quarré. Par conséquent la somme d'un nombre infini de quarrés de la suite naturelle des nombres vaut le tiers du dernier quarré, multiplié par leur nombre. La somme des cubes vaudrait un quart du dernier cube, multiplié par leur nombre ; et en général, *la somme des puissances* m (que je désigne par s^m) *serait exprimée par*.....

$s^m = \frac{1}{m+1} \infty^m \times \infty$, ou bien $s^m = \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$.

281. Si l'on avait une suite infinie de termes dont chacun égalât ∞^m, qui est le plus grand de la suite des puissances m, leur somme serait $\infty^m \times \infty = \infty^{m+1}$; donc cette somme serait à celle des puissances m de la suite naturelle $:: \infty^{m+1} : \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$, ou bien $:: m+1 : 1$; ce qui fournit ce principe : *que la somme des quarrés de la suite naturelle infinie* 1, 2, 3, *etc.* .... ∞ *est à la somme d'un égal nombre de quarrés, dont chacun égalerait le dernier* (∞^2) *de la suite supérieure, comme* 1 *est à* 3.

CHAPITRE VIII.

De l'origine et des principales propriétés des logarithmes.

282. Nous avons déja vu (223) que, pour mesurer les raisons que les différents nombres admettent entre eux, il suffisait d'avoir mesuré les raisons de ces mêmes nombres à l'unité ; puisqu'on a toujours $a : b = a : 1 - b : 1$. Mais pour déterminer celles-ci, on doit prendre pour module une raison fixe qui ait pour conséquent 1 (226), et pour antécédent un nombre quelconque plus grand que 1, que je désigne par a ; de sorte que ce module sera la raison de $a : 1$. Dès lors, si l'on veut savoir la valeur de la raison qu'il y a entre un nombre quelconque et l'unité,

par exemple celle de $Q : 1$, on cherchera combien de fois la raison de $Q:1$ contient celle de $a : 1$; et le nombre qui désignera combien de fois $Q : 1$ contient $a:1$, sera l'expression numérique de la valeur de la raison de $Q : 1$.

283. DÉFINITION. *Les logarithmes ne sont autre chose que des expressions numériques, désignant les valeurs des raisons entre différents nombres et l'unité.*

Telle est en effet la signification du mot *Logarithme*, qui désigne, d'après l'étymologie, *nombre des raisons.* Ainsi, non-seulement un logarithme suppose toujours une raison, mais il est encore le vrai *exposant* de sa valeur, en ce qu'il désigne combien de fois elle contient celle qui sert d'unité de mesure ; et quand nous dirons dans la suite *l.* 100, *l.* 1000, etc. nous entendrons *l.* (100:1), *l.* (1000:1)(*). Ce n'est que dans ce sens que ces premières expressions sont exactes, quoiqu'elles soient généralement adoptées par l'usage.

De cette définition et de ce que nous avons déjà dit sur les raisons, on déduira toutes les propriétés des logarithmes.

284. I. Le terme a du module pouvant varier à l'infini, *il peut y avoir une infinité de mesures différentes des raisons numériques*, ce qui donne autant de systèmes différents de logarithmes (nous rapporterons plus bas les deux principaux).

285. II. La valeur de la plupart des raisons étant indéterminable (227), il faut que dans chaque système, la plupart des logarithmes le soient aussi ; et alors on les prend par approximation.

286. III. *Les logarithmes des nombres plus grands que l'unité doivent être positifs*, parce qu'ils expriment des raisons de majorité (221). Ainsi *l.* 100, *l.* 10, *l.* 2, etc. sont

(*) Il ne faut pas oublier que ces expressions numériques s'énoncent ainsi : *Logarithme de la raison de* 100 *à* 1, *logarithme de la raison de* 1000 *à* 1.

positifs, parce qu'ils désignent $l.\ 100 : 1$, $l.\ 10 : 1$, $l.\ 2 : 1$ (283). Mais $l.\frac{1}{100}$, $l.\frac{1}{10}$, $l.\frac{1}{2}$, de même que les logarithmes de toutes autres fractions, exprimant les valeurs des raisons de minorité, savoir, de $\frac{1}{100} : 1$, de $\frac{1}{10} : 1$, de $\frac{1}{2} : 1$, *doivent être négatifs*. Enfin le logarithme de l'unité doit être o, puisqu'il expose la valeur d'une raison d'égalité, savoir, $1 : 1$, laquelle est o (221).

287. IV. Suivant les principes déja posés (219), $a : 1 + b : 1 + c : 1 = abc : 1$. Or, (283) l'expression numérique de la valeur de $a : 1$ est $l.\ a$; celle de $b : 1$ est $l.\ b$, celle de $c : 1$ est $l.\ c$. celle de $abc : 1$ est $l.\ abc$. Donc $l.\ a + l.\ b + l.\ c = l.\ abc.$, ou bien *le logarithme d'un produit vaut la somme des logarithmes de ses facteurs.*

288. COROLLAIRE. I. Il suit de là qu'en transposant on a $l.\ a = l.\ abc - l.\ b - l.\ c$; c'est-à-dire, que *le logarithme d'un facteur vaut le logarithme du produit, moins les logarithmes des autres facteurs.* Or, dans toute division, le quotient et le diviseur sont les deux facteurs du dividende. Donc *le logarithme du quotient vaut toujours celui du dividende, moins celui du diviseur.* Ainsi $l.\frac{a}{b} = l.\ a - l.\ b$... $l.\frac{ab}{cd} = l.\ ab - l.\ cd$, ou bien $= l.\ a + l.\ b - l.\ c - l.\ d.$

289. Il est aisé de déduire de là les expressions des logarithmes des puissances et des racines. Car puisque $a^2 = a \times a$, $l.\ a^2 = l.\ a + l.\ a = 2\ l.\ a.$ puisque $a^3 = a \times a \times a$, $l.\ a^3 = l.\ a + l.\ a + l.\ a = 3\ l.\ a.$, et en général $l.\ a^n = n\ l.\ a$; ce qui exprime que *le logarithme d'une puissance quelconque vaut celui de la racine, multiplié par l'exposant de cette puissance.*

290. II. Puisque $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$, $l.\ a = l.\ \sqrt{a} + l.\ \sqrt{a} = 2l.\ \sqrt{a}$, ou bien $l.\ \sqrt{a} = \frac{l.a}{2}$. De même puisque $a =$

$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a}$, $l.a = 3\, l.\sqrt[3]{a}$, ou bien $l.\sqrt[3]{a} = \frac{l.a}{3}$: et enfin $l.\sqrt[n]{a} = \frac{l.a}{n}$. C'est-à-dire, que *le logarithme d'une racine d'un nombre vaut celui de ce nombre, divisé par l'exposant de cette racine.*

291. Remarques. I. De ce que *l.* Q. exprime combien de fois Q : 1 contient le module, savoir a : 1, il s'ensuit que si $l.\ Q = 2$, $Q : 1 = a : 1 + a : 1 = a^2 : 1$, et qu'ainsi (210) $Q = a^2$: que si $l.\ Q = 3$, $Q : 1 = a : 1 + a : 1 + a : 1 = a^3 : 1$ ou bien $Q = a^3$: et le même raisonnement pouvant s'appliquer à tous les autres cas, il s'ensuit que *le logarithme d'un nombre quelconque* Q, *est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever l'antécédent* (a) *du module, pour avoir ce nombre* (on appelle cet antécédent la *base logarithmique*); parce qu'on conclut que de ce nombre élevé à ses différentes puissances se forment tous les autres; les uns exactement, savoir, ceux qui sont des puissances exactes de a, les autres par approximation.

292. II. *Si quatre termes sont en proportion géométrique, leurs logarithmes sont en proportion arithmétique.* Car de ce que $a : b = c : d$, il s'ensuit (223) que $a : 1 - b : 1 = c : 1 - d : 1$, ou bien que (283) $l.\ a - l.\ b = l.\ c - l.\ d$, c'est-à-dire (264) qu'il y a proportion arithmétique entre ces logarithmes (il est aisé de démontrer la réciproque, savoir que si $l.\ a - l.\ b = l.\ c - l.\ d$, on a $a : b = c : d$.).

293. Les formules suivantes présentent en abrégé toutes les opérations qu'on peut faire sur les logarithmes.

$L.\ pq = l.\ p + l.\ q$	$L.\ (p^2 - q^2) = l.\ (p+q) + l.\ (p-q)$
$L.\ \frac{p}{q} = l.\ p - l.\ q$	$L.\left(\frac{p+q}{p-q}\right) = l.\ (p+q) - l.\ (p-q)$
$L.\ p^n = n\, l.\, p.$	$L.\ (p-q)^{-n} = -n\, l.\ (p-q)$
$L.\ p^{-n} = -n\, l.\, p$	$L.\sqrt{\frac{p^2+q^2}{p-q}} = \frac{1}{2}\, l.\left(\frac{p^2+q^2}{p-q}\right) =$
$L.\sqrt[n]{p} = \frac{1}{n}\, l.\, p$	$= \frac{1}{2}\, l.\ (p^2+q^2) - \frac{1}{2}\, l.\ (p-q)$

CHAPITRE IX.

Des différents systèmes de logarithmes, de l'origine des tables et de la manière de s'en servir.

294. Si l'on connaissait les logarithmes des nombres entiers au dessus de l'unité, on connaîtrait aisément ceux des nombres fractionnaires ; car une fraction indiquant un quotient (41), il suffirait de soustraire le logarithme du dénominateur de celui du numérateur (288), et la différence serait le logarithme de la fraction, d'où il suit que le logarithme serait négatif, si la fraction valait moins que 1 ; parce que alors le dénominateur étant plus grand que le numérateur, il faudrait soustraire un logarithme d'un autre plus petit que lui. Ce logarithme serait positif, si la fraction valait plus que 1 ; et il serait 0, si la fraction égalait l'unité.

295. *Parmi les nombres entiers, on ne doit chercher les logarithmes que des seuls nombres simples.* Car les nombres composés étant toujours le produit de quelques nombres simples (78), il ne faudra qu'ajouter les logarithmes de ceux-ci, pour avoir les logarithmes des autres. Ainsi, prenant 10 pour base, ou supposant (291) son logarithme $= 1$, si l'on connaissait d'ailleurs le logarithme de 2, que j'appelle x, on aurait :

L. 4 $= 2x$	L. 20 $= x + 1$
L. 8 $= 3x$	L. 40 $= 2x + 1$
L. 16 $= 4x$	L. 80 $= 3x + 1$
L. 32 $= 5x$	L. 800 $= 3x + 2$
L. 64 $= 6x$	L. 8000 $= 3x + 3$

Si l'on avait encore le logarithme de 3 que j'appelle y, on trouverait L. $6 = x + y$; L. $9 = 2y$; L. $12 = 2x + y$; L. $18 = x + 2y$, L. $24 = 3x + y$, etc. (Nous exposerons plus bas dans les notions du calcul intégral la méthode la

plus abrégée qu'on ait aujourd'hui pour trouver les logarithmes des nombres simples).

296. Quelques avantages particuliers ont déterminé les géomètres à chercher ces logarithmes des différents nombres dans un système où l'on a pris la raison de 10:1 pour raison modulaire, ou bien 10 pour base logarithmique. D'après cette première convention, on a formé des tables qui contiennent une longue suite de nombres avec leurs logarithmes à côté ; et de là résulte ce double avantage que, connaissant un nombre, on trouve de suite son logarithme ; et réciproquement, connaissant un logarithme, on trouve le nombre auquel il répond. Ainsi, si je voulais multiplier 99 par 92, en me servant des logarithmes tabulaires, j'arrangerais ces nombres et leurs logarithmes comme on le voit ici. . . . . L. 92 = 1, 9637878

L. 99 = 1, 9956352

L. du produit = 3, 9594230

c'est-à-dire, que je prendrais la somme des logarithmes des nombres 92 et 99, qui est 3, 9594230 ; et voyant par les tables que cette somme est le logarithme de 9108, j'en conclurais que ce dernier nombre est le produit des deux premiers.

297. COROLLAIRE. *Dans le système des tables, le logarithme d'un nombre n'est donc autre chose que l'exposant de la puissance, à laquelle il faut élever* 10 *pour égaler ce nombre.* Ainsi le logarithme de 20 étant 1,3010300, il s'ensuit que $20 = (10)^{1,3010300}$.

298. D'où l'on conclura 1.° que dans le système des tables, les seuls nombres entiers qui aient des logarithmes exacts, sont 1, 10, 100, 1000, 10000, etc. parce qu'ils sont les seules puissances exactes de 10, savoir, $(10)^0$, $(10)^1$, $(10)^2$, $(10)^3$, etc.

299. 2.° Que les logarithmes de tous les nombres contenus entre 1 et 10, doivent être exprimés par une frac-

tion seule : qu'entre 10 et 100 ils doivent l'être par 1, plus une fraction : entre 100 et 1000 par 2, plus une fraction, etc. Donc l'*entier qui précède la fraction décimale d'un logarithme, a toujours une unité de moins, qu'il n'y a de caractères dans le nombre auquel appartient ce logarithme.* (Cet entier s'appelle, pour cette raison, la *caractéristique* du logarithme).

300. THÉORÈME. *Tous les logarithmes d'un système sont proportionnels aux logarithmes correspondants d'un autre système.*

Soient deux nombres quelconques m et n dont les logarithmes soient Q et P dans un système, q et p dans un autre système, je dis qu'on aura $Q : q :: P : p$.

DÉMONSTRATION. Supposons que la base du premier système soit a, et celle du second b ; on aura donc pour le nombre m ces deux équations $m = a^Q$, $m = b^q$; et par conséquent $a^Q = b^q$ ou $a = b^{\frac{q}{Q}}$ (*) : de même en prenant le logarithme de n dans les deux systèmes, on trouve $a = b^{\frac{p}{P}}$. Donc $\frac{q}{Q} = \frac{p}{P}$, ou bien (211) $Q : q :: P : p$.

301. COROLLAIRE. Il s'ensuit de là *qu'avec les logarithmes des tables, on peut trouver ceux d'un autre système quelconque.* Supposons en effet qu'on cherche le logarithme du nombre n dans un système où l'on prendrait 5 pour base : appelons P son logarithme tabulaire, et p son logarithme nouveau. Le logarithme de 5, d'après les tables est 0, 6989700, et dans le nouveau système il est 1 (291). J'aurai donc 0, 6989700 : 1 :: $P : p = 1.4306765 \times P$. donc quel que soit le nombre n, si on multiplie son logarithme

(*) On ne détruit jamais l'égalité qu'il y a entre deux quantités, quand on fait sur l'une les mêmes changements qu'on fait sur l'autre. Or, ici on a divisé chaque exposant de deux quantités égales par Q.

tabulaire

tabulaire par 1.4306765, on aura son logarithme dans le système de la base 5.

302. I. QUESTION. *Connaissant dans une progression géométrique le premier terme* a, *le dernier* t, *et la valeur* m *du quotient qui règne dans la progression, trouver le nombre* n *des termes.*

SOLUTION. Par ce que nous avons dit ailleurs (254), $t = am^{n-1}$; donc $l.t - l.a = (n-1)\,l.m$; divisant par $l.m$ et transposant -1, on a $n = \frac{l.t - l.a}{l.m} + 1$.

Et en général toute question dans laquelle l'inconnue sert d'exposant à une puissance, ne peut être résolue directement que par les logarithmes, et elle l'est aisément par ce moyen. Ainsi dans $p^x = a$, $x = \frac{l.a}{l.p}$: dans $\frac{p^x q^{x-n} r}{b^x} = a$, $x = \frac{l.a + n\,l.q - l.r}{l.p + l.q - l.b}$.

303. II. QUESTION. *Une somme d'argent, désignée par* a, *a été placée à intérêt à* 5 *pour cent, à condition que les intérêts de chaque année seraient réunis au capital. On demande à quoi ce fonds montera après un nombre donné d'années, exprimé par* n.

SOLUTION. Il est clair qu'à la fin de la première année, ce fonds sera $a + \frac{5}{100}a$, ou bien $\left(\frac{105}{100}\right)a$, ou bien encore $\left(\frac{21}{20}\right)a$: à la fin de la seconde année, ce fonds sera $\left(\frac{21}{20}\right)a + \frac{\left(\frac{21}{20}\right)a}{20}$. Réduisant ces deux fractions au même dénominateur, on a $\left(\frac{21\times 20}{20\times 20}\right)a + \left(\frac{21}{20\times 20}\right)a$, ou bien en prenant la somme $\left(\frac{21\times 21}{20\times 20}\right)a = \left(\frac{21}{20}\right)^2 a$. Par un semblable calcul on trouvera qu'à la fin de la troisième

année, ce fonds sera $\left(\frac{21}{20}\right)^3 a$; de façon qu'après un nombre d'années n, il sera $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$.

Si les intérêts avaient été à 2 pour cent, le fonds serait devenu, après la première année $\left(\frac{102}{100}\right) a$, après la seconde $\left(\frac{102}{100}\right)^2 a$, et après n années $\left(\frac{102}{100}\right)^n a$.

Appellant donc x la valeur inconnue de ce fonds après un nombre n d'années, nous aurons $x = \left(\frac{21}{20}\right)^n a$, si le taux pour cent est 5. Donc $l.\ x = l.\left(\frac{21}{20}\right)^n a = nl.\left(\frac{21}{20}\right) + l.\ a = n\ (l.\ 21 - l.\ 20) + l.\ a$: formule dont on peut tirer la solution de toutes les questions de cette espèce, en donnant à n et à a les valeurs que la question exige.

EXEMPLE. Supposons le capital $a = 1000$ écus, et qu'on demande ce qu'il doit revenir après 100 ans, en comptant ainsi les intérêts des intérêts.

Je fais dans la formule $n = 100$ et $a = 1000$.

Je sais par les tables que $\left\{\begin{array}{l} \text{L. } 21 = 1,3222193 \\ \text{L. } 20 = 1,3010300 \end{array}\right\}$

Donc $l.\ 21 - l.\ 20 \ldots\ldots\ldots = 0,0211893.$

Donc $100\ (l.\ 21 - l.\ 20) \ldots\ldots = 2,1189300.$

Ajoutant $l.\ 1000 \ldots\ldots\ldots = 3,0000000.$

On a $n\ (l.\ 21 - l.\ 20) + l.\ a$, ou $l.\ x = 5,1189300.$

Or, le nombre qui répond à ce logarithme est 131501, ainsi dans cette supposition $x = 131501$ écus.

304. III. QUESTION. *On suppose une suite de nombres, qui commence à 2, et dont chacun des autres soit le quarré de celui qui le précède immédiatement : on demande combien il faudra de caractères, pour exprimer le vingt-cinquième nombre de cette suite.*

SOLUTION. Je vois d'abord que ces nombres peuvent être representés ainsi : 2^1, 2^2, 2^4, 2^8, 2^{16}, etc. et je remarque que les exposants du nombre 2, sont les puissances successives de ce même nombre, commençant à 0. L'exposant du 25.me terme sera donc $2^{24}=16777216$, et ce terme se présentera ainsi : $2^{16777216}$. Son logarithme sera donc $16777216 \times l.2$. Or, $l.2=0,3010300$, qui étant multiplié par 16777216, donne 5050445, 3324600. Il faudra donc 5050446 caractères pour exprimer le nombre en question (299); ce qui suffirait pour remplir 9 volumes de 350 pages chacun, dont chaque page contiendrait 40 lignes et chaque ligne 40 caractères.

CHAPITRE X.

Des permutations, des combinaisons et de leurs différents usages.

305. DÉFINITION. *On entend par permutations les différents arrangements ou dispositions qu'on peut donner à plusieurs choses.* Ainsi les deux lettres *a* et *b* admettent deux permutations; puisqu'on peut les arranger de ces deux manières *ab*, *ba*.

Nous supposerons ici que les choses dont on cherche les permutations, sont représentées par des lettres. Alors il peut arriver que toutes les lettres qui entrent dans ces permutations soient différentes, ou bien que la même y soit répétée un certain nombre de fois.

306. I. QUESTION. *On demande combien de permutations peut fournir un nombre* n *de lettres, qui sont toutes différentes.*

Pour le découvrir, j'observe d'abord que deux lettres *a* et *b* admettent ces deux arrangements ou permutations *ab*, *ba*. Or, une troisième lettre *c* peut occuper trois places différentes dans *ab*, ainsi que dans *ba*; en l'écrivant ou bien au milieu, ou bien à chaque extrémité. Donc

les trois lettres *a*, *b*, *c*, admettent ces six changements différents *acb*, *cab*, *abc*, *bca*, *cba*, *bac*. Connaissant les permutations de trois lettres, je connaîtrai aisément celles de quatre, en observant que la quatrième lettre *d* peut se placer de quatre manières différentes, dans chacune des six permutations des trois premières : ce qui fait 24 permutations. Comme le même raisonnement peut s'appliquer à un nombre quelconque de lettres différentes, on en conclura : *que les permutations de deux lettres différentes sont exprimées par* 1. 2 = 2 : *celles de trois, par* 1. 2. 3 = 6 : *celles de quatre, par* 1. 2. 3. 4 = 24 : *celles de cinq, par* 1. 2. 3. 4, 5 = 120, *et ainsi des autres.*

307. II. QUESTION. *On demande combien de permutations peut donner un nombre de lettres, parmi lesquelles il y en a qui sont répétées, comme dans* a, a, b.

Nous venons de voir que si ces trois lettres étaient différentes, et qu'on eût *a*, *b*, *c*, il en naîtrait six permutations; attendu que les deux premières *a*, *b* en donneraient deux, et que la troisième *c* pourrait se placer de trois façons différentes dans chacune. Or, dans *a*, *a*, *b* les deux premières lettres ne donnent qu'une permutation, savoir : *aa* ; donc la troisième lettre *b* ne s'y peut placer que de trois façons différentes, et par là les six permutations se réduisent à trois, ou bien à $\frac{1.2.3}{1.2} = 3$.

Si on avait proposé les quatre lettres *a*, *a*, *a*, *b*, on aurait pu raisonner de même, en disant que si toutes ces lettres étaient différentes, les trois premières auraient fourni six permutations, dans chacune desquelles la quatrième lettre *b* aurait pu se placer de quatre différentes manières ; ce qui aurait donné 24 permutations. Mais ces six permutations des trois premières lettres se réduisant à une, ou bien leur nombre devenant six fois plus petit, il faut aussi que le nombre total des permutations à quatre lettres, devienne six fois plus petit ; il sera donc $\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$.

308. En général, *on trouvera que s'il y a des lettres répétées, le nombre des permutations est égal à celui qu'elles fourniraient étant toutes différentes, divisé par celui que fourniraient les lettres semblables, combinées comme si elles ne l'étaient pas.*

Ainsi le nombre des permutations de *aaaab*, $= \frac{1.2\,3.4.5}{1.2.3.4}$ $=5$; celui de *aaabb*, $= \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.1.2} = 10$: celui de *aaabbb*, $= \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2.3} = \frac{720}{36} = 20.$

309. Ou plus généralement un nombre m de lettres a et un égal nombre de lettres b, prises m à m, donnent chacune 1 permutation, si l'on prend m fois a ou m fois b; car (308) le nombre de ces permutations est alors exprimé par $\frac{m.m-1.m-2...}{m.m-1.m-2...} = 1$: elles donnent m permutations, si l'on prend $m-1$ fois a et 1 fois b; car, dans ce cas, le nombre de permutations est $\frac{m.m-1.m-2...}{1.m-1.m-2...} = m$: elles donnent $\frac{m.m-1}{1.2}$ permutations, si l'on prend $m-2$ fois a et 2 fois b; puisqu'un tel nombre est désigné par $\frac{m.m-1.m-2.}{1.2.m-2...}$ $= \frac{m.m-1}{1.2}$; etc...

310. Remarques. I. Lorsqu'on multiplie un polynome simple, un certain nombre de fois par lui-même, chaque terme du produit doit contenir autant de lettres qu'on multiplie ensemble de polynomes; en sorte que si ce nombre de polynomes est m, la somme des exposants de chaque terme sera m.

311. II. *Chaque terme doit se trouver autant de fois au produit, que ses lettres peuvent donner de permutations.* En effet, si dans l'exemple ci-dessous, on écrit toujours la lettre du multiplicande avant celle du multiplicateur, on

verra que si dans le premier produit partiel, on place b devant a, dans le second, on le place après; ainsi le terme ab doit se présenter deux fois. De même si dans le premier produit partiel, c est devant a, dans le troisième, il est après; ainsi le terme ac s'y trouve deux fois; c'est-à-dire autant de fois que ses lettres peuvent donner de permutations. Il en est ainsi des autres termes : et la même chose arriverait quel que fût le nombre des facteurs; parce que cela s'ensuit *de ce qu'ils sont supposés les mêmes, et de ce qu'en les multipliant, on écrit leurs lettres les unes à côté des autres.*

EXEMPLE.

$$\begin{array}{l} \quad a + b + c \\ \quad a + b + c \\ \hline \text{Produits partiels.} \left\{ \begin{array}{l} a^2 + ba + ca \\ \quad + ab + bb + cb \\ \qquad\quad + ac + bc + cc \end{array} \right. \\ \hline \text{Produit total.} \ldots\ a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \end{array}$$

312. COROLLAIRE. *Quand on élève le binome* a + b *à la puissance* m, *chaque terme doit donc contenir* m *lettres* (310) *et se présenter autant de fois que ses lettres donnent de permutations* (311). Pour former cette puissance, il n'y a donc qu'à savoir : 1.° combien on peut faire d'espèces différentes de termes à m lettres, avec un nombre m de a et un pareil nombre de b : 2.° combien de permutations admettent les lettres qui forment chaque espèce de termes.

Or, les espèces différentes de termes à m lettres, qu'on peut ainsi former, se déterminent en prenant m fois a et 0 fois b, ou a^m; m-1 fois a et 1 fois b, ou $a^{m-1}b$; m-2 fois a et 2 fois b, ou $a^{m-2}b^2$.... 0 fois a et m fois b, ou b^m.

Le nombre des permutations pour les lettres de chaque

terme est (309) pour a^m, $\frac{m.m-1.m-2.....}{m.m-1.m-2.....} = 1$: pour $a^{m-1}b$, $\frac{m.m-1.m-2\,etc.}{1.m-1.m-2.....} = \frac{m}{1} = m$: pour $a^{m-2}b^2$, $\frac{m.m-1.m-2\,etc.}{1.2.m-2} = \frac{m.m-1}{1.2}$: pour b^m, $\frac{m.m-1.m-2..}{m.m-1.m-2..} = 1$. Il faut donc que la puissance m du binome $a + b$ se présente ainsi :

$$a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 ... + b^m.$$

Ainsi la forme de cette puissance qu'on a déterminée ailleurs (137) par induction, se trouve ici démontrée par la nature même de la chose.

313. Quoiqu'on puisse par la même formule trouver une puissance quelconque d'un trinome, d'un quadrinome, etc. ; il est cependant plus commode, pour éviter de longues multiplications, de la former directement, ainsi qu'on forme le quarré ou le cube (148). Or, d'après les principes précédents, on y peut parvenir par la méthode suivante. Supposons qu'on cherche la quatrième puissance du quadrinome $a + b + c + d$; pour la trouver, *formez d'abord quatre colonnes, dont chacune contienne les quatre premières puissances des lettres* a, b, c, d : *commençant ensuite par le terme supérieur de la première colonne à gauche, formez, avec les termes qui sont à la droite, tous les produits possibles à quatre dimensions : donnez pour coëfficient à chaque produit, le nombre qui détermine combien de permutations il peut avoir ; et vous formerez la puissance cherchée.*

Ainsi dans l'exemple suivant, j'écris d'abord le terme a^4, sans le multiplier par d'autres ; parce qu'il a quatre dimensions : je lui donne 1 pour coëfficient ; parce que les lettres de ce terme n'admettent qu'une permutation (308). Descendant à a^3, je vois qu'il peut former quatre dimensions avec b, c, d, et non point avec d'autres termes à sa droite. J'écris donc $a^3 b$, $a^3 c$, $a^3 d$; et je fais le coëfficient 4, parce que chaque terme admet ici quatre per-

mutations (308). a^3 peut donner quatre dimensions avec b^1, c^1, d^1, et chaque terme admettant alors 6 permutations (308), je place 6 pour coëfficient de $a^3 b^1$, $a^3 c^1$, $a^3 d^1$: le même a^3 peut donner encore quatre dimensions avec bc, bd, cd, et chacun donnant alors 12 permutations (308), j'écris $12a^2 bc$, $12a^2 bd$, $12a^2 cd$. (Il est inutile de parler des autres termes).

EXEMPLE.

$$(a+b+c+d)^4$$

a^4	b^4	c^4	d^4
a^3	b^3	c^3	d^3
a^2	b^2	c^2	d^2
a^1	b^1	c^1	d^1

$$\begin{aligned}
&a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4 + c^4 + d^4 \\
&\quad + 4a^3 c + 6a^2 c^2 + 4ac^3 + 4b^3 c + 4c^3 d \\
&\quad + 4a^3 d + 6a^2 d^2 + 4ad^3 + 4b^3 d + 6c^2 d^2 \\
&\qquad + 12a^2 bc + 12ab^2 c + 6b^2 c^2 + 4cd^3 \\
&\qquad + 12a^2 bd + 12ab^2 d + 6b^2 d^2 \\
&\qquad + 12a^2 cd + 12ac^2 b + 12b^2 cd \\
&\qquad\qquad + 12ac^2 d + 4bc^3 \\
&\qquad\qquad + 12ad^2 b + 4bd^3 \\
&\qquad\qquad + 12ad^2 c + 12bc^2 d \\
&\qquad\qquad + 24abcd + 12bd^2 c
\end{aligned}$$

314. DÉFINITION. *Nous entendons par combinaisons de plusieurs quantités, le nombre de fois que ces quantités peuvent être prises, ou une à une, ou deux à deux, ou trois à trois, etc.* Ainsi les trois quantités a, b, c admettent trois combinaisons une à une, savoir, a, b, c; trois combinaisons deux à deux, savoir, ab, ac, bc; et une combinaison trois à trois, savoir, abc.

315. III. QUESTION. *On demande combien de combinaisons peut donner un certain nombre de quantités, comme* a, b, c, d, *en les prenant d'abord une à une, ensuite deux à deux, puis trois à trois, etc.*

J'observe 1.° que prises une à une, elles donnent autant de combinaisons qu'il y a de lettres ; ainsi m lettres donneraient m combinaisons.

2.° Que les prenant deux à deux, j'écris une fois plus de lettres, que je ne forme de combinaisons ; puisque je mets deux lettres dans chacune. Connaissant donc le nombre des lettres écrites, et le divisant par 2, j'aurai le nombre de leurs combinaisons deux à deux.

Pour avoir le nombre des lettres écrites, je remarque que chaque lettre doit être écrite avec chacune des autres ; et qu'ainsi s'il y en a 4, chacune sera écrite 3 fois ; donc le nombre des lettres écrites sera 4.3 : s'il y en a 5, chacune sera écrite 4 fois ; donc le nombre des lettres écrites sera 5.4 : s'il y a m lettres, chacune sera écrite un nombre de fois exprimé par $m-1$; donc alors le nombre des lettres écrites sera $m.m-1$; et par conséquent celui des combinaisons deux à deux sera $\frac{m.m-1.}{2}$. Pour avoir les combinaisons de ces lettres trois à trois, j'observe également que mettant trois lettres dans chaque combinaison, j'écrirai trois fois autant de lettres, que je formerai de combinaisons. Il ne s'agit donc que de trouver ce nombre de lettres écrites, puisqu'en le divisant par 3, j'aurai le nombre de leurs combinaisons trois à trois.

Pour le trouver, je remarque que si j'ai quatre lettres à combiner trois à trois, comme a, b, c, d, *chacune sera répétée autant de fois, que les trois autres peuvent donner de combinaisons deux à deux.* En effet, pour faire les combinaisons trois à trois, on voit qu'il faut mettre a dans chacune des combinaisons deux à deux, qu'on peut faire avec b, c, d : qu'il faut mettre b dans chacune des combinaisons deux à deux, qu'on peut

faire avec a, c, d : : il en est de même de c par rapport à a, b, d, et de d par rapport à a, b, c. Donc si j'ai m lettres, je vois que chacune sera répétée un nombre de fois exprimé par le nombre des combinaisons deux à deux, que peuvent donner $m-1$ lettres ; c'est-à-dire, par $\frac{m-1.m-2.}{2}$. Donc alors le nombre des lettres écrites trois à trois sera $\frac{m-m-1.m.2.}{2}$; et par conséquent le nombre des combinaisons $= \frac{m.m-1.m-2.}{2.3}$.

Par un semblable raisonnement, on trouverait que m lettres combinées quatre à quatre, donneraient un nombre de combinaisons exprimé par $\frac{m.m-1.m-2.m-3.}{2.3.4}$; Il en serait de même de toutes les autres.

316. IV. QUESTION. *On propose une loterie, dans laquelle il y a un nombre* m *de numéros, qu'on peut prendre en les combinant ou un à un, ou deux à deux, ou trois à trois.... ou* r *à* r. *De tous ces numéros, il n'en doit sortir de la roue de fortune qu'un nombre* n ; *et l'on demande dans quel rapport est la probabilité de gagner à celle de perdre, en prenant un nombre* p *de combinaisons, ou simples, ou doubles, ou triples, ou etc.*

SOLUTION. La probabilité qu'on a de gagner est en raison du nombre des combinaisons qu'on a prises, et du nombre de celles qui doivent sortir de la roue de fortune : tandis que la probabilité de perdre est en raison du nombre des combinaisons qui ne sortent pas (241). Or, il y a un nombre n de combinaisons simples, qui sortent de la roue, et un nombre $m-n$ qui ne sortent pas. Ainsi par ces sortes de combinaisons, l'espérance doit être à la crainte, comme $np : m-n$. Pour les combinaisons doubles, il y en a un nombre $\frac{n.n-1.}{2}$ qui doit sortir de la roue de fortune, et un nombre $\frac{m^2-m-n^2+n}{2}$ qui n'en doit pas sortir.

Ainsi par celles-là l'espérance est à la crainte :: $\frac{p(n^2-n)}{2}$: $\frac{m^2-m-n^2+n}{2}$. On trouvera de même que par les combinaisons triples, l'espérance est à la crainte :: $\frac{p(n^3-3n^2+2n)}{2.3}$: $\frac{m^3-3m^2+2m-n^3+3n^2-2n}{2.3}$.

De sorte que si l'on fait $p=1$, $m=90$ et $n=5$, on aura par les combinaisons simples, que la probabilité de gagner est à celle de perdre :: 1 : 17; par les doubles :: 1 : 399, 5; par les triples :: 1 : 11747.

317. V. Question. *On demande ici combien on peut faire de questions différentes sur les progressions arithmétiques et géométriques, en supposant connues trois de ces cinq choses, le premier terme* a, *le dernier* t, *le nombre des termes* n, *le quotient ou la différence* q, *la somme* s.

Solution. Puisqu'on suppose qu'à chaque fois il y a trois données, et par conséquent deux inconnues, il y a deux fois autant de questions à faire, qu'on peut trouver de différentes combinaisons pour ces trois données. Or, pour celles-ci, il y a 10 combinaisons, puisque (315) à prendre 5 choses trois à trois, le nombre des combinaisons est $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$. Il y a donc 20 questions différentes à faire sur les progressions, connaissant trois des cinq choses qui y entrent; et elles se résoudront toutes par les deux propriétés, dont l'une donne l'expression de la somme de tous les termes, et l'autre celle du dernier; et dans le cas où il s'agira de trouver la valeur des inconnues exponentielles, comme il arrive dans la progression géométrique, on aura recours aux propriétés des logarithmes, détaillées ci-dessus (Chap. IX).

SECTION IV.

De l'Analyse.

CHAPITRE PREMIER.

Des propriétés générales des Equations.

318. L'ANALYSE en général est l'art de décomposer une quantité en toutes celles qui y sont contenues ; mais ici nous n'entendons par là *que les moyens de trouver dans une expression algébrique la valeur de certaines quantités qui y sont combinées avec d'autres.* Celles dont on cherche la valeur, et qui, pour cette raison, sont appelées des *inconnues*, s'expriment ordinairement par les dernières lettres de l'alphabet, x, y, z, et les quantités données ou *connues*, par les premières. Pour trouver ces valeurs, on forme une *équation* ou *expression d'égalité* entre plusieurs quantités ; tout ce qui est à la gauche du signe $=$, en est le premier membre, et ce qui est à la droite, en est le second. Quand on est parvenu à laisser l'inconnue seule dans un membre, tandis que l'autre est composé de quantités toutes connues, alors on a *dégagé* l'inconnue ; ou bien on a trouvé sa valeur. Cette valeur est appelée *une racine de l'équation*, et l'on ne doit point confondre ces sortes de racines avec celles que fournissent les puissances.

319. AXIOME. *On ne détruit point l'égalité entre les deux membres d'une équation, si l'on fait subir les mêmes changements à l'un et à l'autre.*

On peut donc leur ajouter ou bien en soustraire la même quantité ; les multiplier ou les diviser par la même quantité ; les élever à la même puissance ou bien en ex-

traire la même racine, sans détruire l'égalité qu'il y avait entre eux avant ces changements.

320. COROLLAIRE. Il suit de là, 1.° *que si le même terme avec le même signe se trouve dans les deux membres d'une équation, on peut l'effacer de part et d'autre.* Par là l'expression devient plus simple, sans que l'égalité soit détruite. Ainsi $a^2 + b = x + a^2$ devient $b = x$, en effaçant a^2 de part et d'autre.

321. 2.° *Que s'il y a plusieurs termes semblables dans une équation, on peut les réduire à un seul.* Ainsi $a^2 + x + 3a^2 = c + x$, devient $4a^2 = c$.

322. 3.° *Qu'en changeant le signe d'un terme, on peut le faire passer d'un membre d'équation à l'autre, sans détruire l'égalité.* Ainsi $x^2 + px = q - t$, peut se changer en $x^2 + px + t = q$; car par là on ne fait qu'ajouter la même quantité $+ t$ aux deux membres, et réduire le second; puisque $x^2 + px = q - t$ devient, en ajoutant $+ t$ des deux parts, $x^2 + px + t = q - t + t$; et réduisant le second membre, $x^2 + px + t = q$. Si l'on avait fait $x^2 + px - q = -t$, on aurait soustrait q de chaque membre (cette opération s'appelle *transposition*). *On peut donc par la transposition, faire passer tout le second membre d'une équation dans le premier, en laissant* 0 *à sa place.* Ainsi $x^2 + px = q - t$ peut devenir $x^2 + px - q + t = 0$.

323. Si, après avoir transposé tous les termes d'une équation dans un seul membre, on les ordonne par rapport à une inconnue, on les appellera premier, second, troisième terme, *selon l'ordre décroissant des exposants de cette inconnue;* et on appellera dernier terme celui où l'inconnue ne se trouvera pas. Si enfin la lettre par laquelle on ordonne l'équation, a le même exposant dans plusieurs termes, on les écrira les uns sous les autres, et ils seront censés faire un même terme complexe. Ainsi l'équation suivante, ordonnée par rapport à x, s'écrira sous la forme qu'on voit ici, et on dira qu'elle ne contient que quatre termes.

$$\left.\begin{matrix} x^3 - a \\ -b \\ -c \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^2 + ab \\ +ac \\ +bc \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x - abc \end{matrix}\right\} = 0$$

Après qu'une équation a été réduite, autant qu'il est possible, on dit qu'elle est du degré exprimé par le plus haut exposant de l'inconnue, si elle n'en renferme qu'une; ou bien par la plus grande somme de leurs exposants dans le même terme, si elle en renferme plusieurs. Ainsi l'équation précédente est du troisième degré; celle-ci $xy + x + p = 0$ est du second; et celles-ci $x + b = c$, $x + y + z = q$, sont du premier (*).

Comme chaque opération d'algèbre a sa contraire, il est évident qu'il faut chercher à dégager l'inconnue, par des opérations opposées à celles qui l'ont engagée avec les connues. Or, si l'équation est résoluble, il n'est point possible que l'inconnue n'ait été engagée par quelqu'une des six opérations suivantes, ou par plusieurs à la fois; savoir, par addition ou soustraction; par multiplication ou division; par l'élévation à quelque puissance, ou par l'extraction de quelque racine.

324. I. Si l'inconnue est engagée par addition ou par soustraction, *il faut la dégager par la transposition, en la rendant positive dans un membre, et transposant tous les termes dans l'autre.* Ainsi dans $x + p + q = r$, j'écris $x = r - p - q$; dans $ab - c = cd - x$, j'écris $x = cd - ab + c$. Je suis sûr que, sans détruire l'égalité (319), j'ai employé l'opération opposée à celle par laquelle l'inconnue était engagée.

325. II. Si l'inconnue est multipliée, *il faut composer un membre des seuls termes où elle se trouve, et diviser toute*

(*) On appelle aussi *équations linéaires*, celles du premier degré; *équations planes*, celles du second; *équations cubiques*, celles du troisième. Ces dénominations sont fondées sur quelques rapports avec les dimensions de l'étendue, desquels nous parlerons en géométrie.

l'équation par ce qui multiplie cette inconnue. Ainsi dans $ax + b = c$ on a, en transposant b, et divisant par a, $x = \frac{c-b}{a}$. Mais nous avons vu *que si la même quantité entre pour facteur dans plusieurs termes, elle fait un produit avec tout ce qui n'est pas elle, dans ces mêmes termes.* Il faut donc alors, pour dégager l'inconnue, diviser l'équation par ce qu'il y a dans ces termes de différent de l'inconnue. Ainsi dans $ax + bx + x = c + d$, je vois que, dans le premier membre x, fait un produit avec $a + b + 1$; divisant donc toute l'équation par ce facteur, j'ai $x = \frac{c+d}{a+b+1}$.

326. III. Si l'inconnue est divisée, *il faut tout multiplier par ce diviseur.* Ainsi dans $\frac{x}{a} + b = c - d$, multipliant d'abord par a, j'ai $x + ab = ac - ad$, et transposant j'ai $x = ac - ad - ab$. Dans $\frac{x}{a-b} = c$, j'ai $x = ac - bc$. En général, pour faire disparaître les fractions dans une équation, *il faut multiplier tous ses termes, par le produit de tous les dénominateurs.* Or, pour cela, il suffit, dans chaque terme fractionnaire, d'effacer le dénominateur, et de multiplier par tous les autres dénominateurs (55). Ainsi $\frac{a}{x} + \frac{c}{d} - e = f$, devient $ad + cx - dex = dfx$... $\frac{x^2}{ab} + \frac{x}{p} + \frac{q}{r} = t - u$, devient $prx^2 + abrx + abpq = abprt - abpru$. Par là, on ne fait que multiplier les deux membres par les mêmes facteurs, ce qui ne détruit point l'équation.

327. IV. Si l'inconnue est élevée à quelque puissance, *il faut (s'il se peut) la laisser seule dans un membre, et extraire de part et d'autre la racine analogue à cette puissance.* Ainsi dans $ab + x^2 = c$, j'écris $x^2 = c - ab$; et extrayant la racine quarrée, $x = \pm \sqrt{c - ab}$ (Nous parlerons plus bas des différents cas qui se présentent ici). Enfin, si l'in-

connue est affectée de quelque radical, il faut le faire disparaître *en enlevant tous les termes à la puissance qui répond à ce radical.* Ainsi $\sqrt{x} = b$ devient $x = b^2$; $\sqrt{x^3} = a + b$ devient $x^3 = (a+b)^2$ et $x = \sqrt[3]{(a+b)^2}$.

La manière dont l'inconnue est engagée fera donc voir, dans tous les cas, quelle est celle des opérations précédentes qu'il faut employer pour la dégager.

CHAPITRE II.

Des équations du premier degré à une seule inconnue.

328. AVANT d'en venir à l'application des règles précédentes, il se présente quelques réflexions à faire sur la manière de mettre un problème en équation. D'abord on voit qu'il serait absurde d'en demander la solution, sans assigner quelque condition, ou rapport des quantités connues avec les inconnues, d'où l'on pût la tirer. Quelquefois, à la vérité, on n'est pas obligé de détailler ces conditions; parce qu'elles dépendent de certaines propriétés des quantités qui entrent dans le problème; et que, sans être explicitement énoncées, elles n'en sont pas moins renfermées dans la question proposée. Dans ce cas l'analyste ne peut les découvrir, que par la réflexion aidée des connaissances relatives au sujet dont il s'agit. Ces conditions une fois connues, il exprimera par des lettres les différentes quantités qui entrent dans la question, et il formera autant d'équations, qu'il y a de rapports différents entre ces quantités. Il évitera surtout d'introduire dans le calcul plus de lettres qu'il n'en faut, et de présenter comme *indépendantes* des équations qui, par quelque opération algébrique, peuvent se réduire à la même. Enfin il s'assurera, avant de commencer ses calculs, que chaque équation est la traduction exacte de la condition qu'elle

qu'elle doit exprimer, et que toutes ensemble rendent fidellement la question proposée. Mais ici, comme dans plusieurs autres cas, les exemples instruisent mieux que les préceptes.

329. PROBLÈME I. *Pierre et Jean ont fait ensemble un fonds de* 565 *écus*; *Pierre en a mis* 137 *de plus que Jean, on demande qu'elle est la mise de chacun.*

SOLUTION. 1.°. Je vois que les noms de mise, d'écus, de Pierre et de Jean, sont de pures dénominations inutiles pour la solution de la question. C'est pourquoi, les laissant à part, je fais : $\left\{\begin{array}{l} 565 = a \\ 137 = b \end{array}\right\}$

2.° Quoiqu'il paraisse d'abord qu'il y a ici deux inconnues, savoir, la mise de Pierre et celle de Jean, je vois bientôt qu'il n'y en a réellement qu'une ; puisque connaissant celle de Pierre, il suffira d'en soustraire 137 écus ou b, qui fait la différence des mises, pour avoir celle de Jean. Ainsi, appelant la première x, la seconde sera $x - b$.

3.° D'après les conditions du problème, il faut que la somme de ces deux mises vaille 565 écus ou a ; donc tout sera exactement exprimé en faisant $x + x - b = a$. Transposant et réduisant, $2x = a + b$; et divisant par 2 (325) $x = \frac{a+b}{2}$, expression de la mise de Pierre. Pour avoir celle de Jean, je soustrais b de $\frac{a+b}{2}$, ce qui donne $\frac{a+b}{2} - b$; et donnant un même dénominateur, puis réduisant, je trouve $\frac{a-b}{2}$. Si je substitue les nombres à la place des lettres, la mise de Pierre sera $\frac{565+137}{2} = \frac{702}{2} = 351$ écus, et celle de Jean sera $\frac{565-137}{2} = \frac{428}{2} = 214$ écus. En effet, on trouvera que la somme de ces deux mises

est 565, et que l'excès de la première sur la seconde est 137, comme le problème le porte.

330. REMARQUE. L'analyse mène souvent à des vérités qu'il est aisé, en suivant une marche contraire, de prouver par la voie de la synthèse. Ainsi la solution du problème précédent peut donner lieu à ce théorème.

331. THÉORÈME. *La plus grande de deux quantités vaut la moitié de leur somme, plus la moitié de leur différence; et la plus petite vaut la moitié de la somme, moins la moitié de la différence.*

DÉMONSTRATION. Soit $a > b$: 1.° je dis que l'on trouve a en prenant la moitié de la somme de a et de b, savoir : $\frac{a+b}{2}$, et lui ajoutant la moitié de la différence, qui est $\frac{a-b}{2}$. En effet, $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ (en effaçant $+\frac{b}{2}$ et $-\frac{b}{2}$) devient $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$ ou a. 2.° Je dis qu'on trouve b en soustrayant la moitié de la différence de la moitié de la somme; car il vient alors $\frac{a+b-a+b}{2} = \frac{2b}{2} = b$

332. PROBLÈME II. *Trouver un nombre, qui, multiplié par* 12, *vaille autant qu'ajouté à* 12.

SOLUTION. Soit x pour ce nombre, et nous aurons $x + 12 = 12x$; donc $12 = 12x - x = 11x$, et $x = \frac{12}{11}$.

Si au lieu de 12 nous écrivions a, il nous viendrait $x = \frac{a}{a-1}$; et l'on pourrait déduire de là cette propriété générale : *que si un nombre est divisé par un autre plus petit que lui d'une unité, le quotient sera tel que, soit en l'ajoutant au dividende, soit en le multipliant par ce dividende, la somme et le produit seront toujours égaux.* Ainsi $12 + \frac{12}{11}$, ou $13\frac{1}{11}$, vaut autant que $12 \times \frac{12}{11} = \frac{144}{11} = 13\frac{1}{11}$:

de même $4 + \frac{4}{3} = 4 \times \frac{4}{3}$, car l'un et l'autre de ces nombres est $5\frac{1}{3}$.

333. PROBLÈME III. *Un marchand a trois débiteurs*, A, B, C; *il a oublié ce que chacun lui doit, et se souvient seulement que les dettes de* A *et de* B, *ajoutées ensemble, valent* 60 *écus*; *celles de* A *et de* C, 80; *celles de* B *et de* C, 92. *On demande combien chacun lui doit.*

SOLUTION. J'appelle la dette de A, x; et puisque par la première condition, étant ajoutée à celle de B, elle vaut 60 écus, l'autre sera $60 - x$. De plus, comme A et C par la seconde condition doivent 80 écus, la dette de C est $80 - x$: et enfin, puisque, par la troisième supposition, les deux dettes de B et de C ajoutées ensemble valent 92 écus, $60 - x + 80 - x = 92$. En transposant, j'ai donc $140 - 92 = 2x$: réduisant $2x = 48$: divisant par 2, $x = 24$. Donc A doit 24 écus; B qui doit $60 - x$, en doit 36; et C qui doit $80 - x$, en doit 56; et l'on voit que ces nombres remplissent les conditions du problème.

334. PROBLÈME IV. *Quelqu'un regardant à sa montre, on lui demande l'heure qu'il est. Il répond: entre* 5 *et* 6, *mais comme on veut une réponse plus précise, il ajoute: dans cet instant l'aiguille des minutes et celle des heures sont sur le même point. On demande quelle heure il était alors.*

SOLUTION. Il ne s'agit ici que de chercher la partie ou les parties d'une heure, qu'il faut ajouter à 5.h pour avoir l'heure demandée. Appelant donc cette partie d'heure x; le point où se rencontrent les deux aiguilles, A, j'observe que dans le temps que l'aiguille des heures a parcouru sur le cadran l'espace x, celle des minutes est venue de midi en A, c'est-à-dire, que désignant par 1 chaque intervalle qui sépare les heures sur le cadran, elle aura parcouru dans ce même temps un espace désigné par

$5+x$. Or, la vitesse de la première étant la douzième partie de celle de la seconde, l'espace x doit être la douzième partie de $5+x$; ce qui donne l'équation $x=\frac{5+x}{12}$; ôtant la fraction et transposant, il vient $11x=5$; et enfin $x=\frac{5}{11}$ h., c'est-à-dire, qu'il était alors $5^h+\frac{5}{11}$, ou bien $5^h.$, $27'\frac{3}{11}$.

Si le point auquel répondent les aiguilles, eût été supposé entre 6 et 7, on aurait eu $x=\frac{6}{11}$ h.; entre 7 et 8, $=x\frac{7}{11}$ h.; entre 8 et 9, $x=\frac{8}{11}$ h.; de sorte que le dénominateur de cette fraction est toujours 11, et le numérateur est le nombre qui désigne l'heure au-delà de laquelle les aiguilles sont supposées se trouver.

335. PROBLÈME V. *Un marchand a deux sortes de vin, l'un à 20 s. la pinte, l'autre à 12 s. Il veut les mêler ensemble pour en faire 100 pintes à 14 s. la pinte; on demande combien il doit prendre de pintes de chaque sorte.*

SOLUTION. Si l'on appelle x le nombre des pintes de la meilleure sorte, $100-x$ exprimera le nombre des autres. Il faut donc, pour avoir en sous le prix de la meilleure sorte, multiplier 20 par x, ce qui fait $20x$; pour avoir le prix de l'autre, multiplier $100-x$ par 12, ce qui fait $1200-12x$; et pour avoir le prix du mélange, multiplier 100 par 14, dont le produit est 1400. Or, le prix des deux sortes devant valoir ensemble le prix du mélange, on a $1200-12x+20x=1400$. Réduisant et transposant, $8x=200$; ou bien $x=\frac{200}{8}=25$; c'est-à-dire, que le nombre des pintes de la meilleure sorte doit être 25, et celui de l'autre sorte $100-25$ ou 75.

CHAPITRE III.

Des équations du premier degré à plusieurs inconnues.

336. Si un problème ne fournit pas autant d'équations que d'inconnues, il n'est point possible de trouver la valeur de chacune. Par exemple, si on n'avait que cette équation $ax = c - by$; avec les deux inconnues qu'elle renferme, on aurait en divisant par a, $x = \frac{c-by}{a}$, ou bien en divisant par b, $y = \frac{c-ax}{b}$; où l'on voit que la valeur de x renferme y, et que celle de y renferme x. Ainsi ces sortes d'équation n'apprennent rien ni sur x ni sur y, à moins qu'on ne suppose une valeur à l'une ou à l'autre. Faisant, par exemple, $y = 6$, j'aurai $x = \frac{c-6b}{a}$; et faisant $x = 2$, j'aurai $y = \frac{-2a}{b}$. Ces sortes d'équations s'appellent *indéterminées*, et les problèmes qui les donnent, sont aussi appelés *problèmes indéterminés*; parce qu'ils sont susceptibles d'une infinité de solutions, à moins que l'état de la question ne leur fixe des limites. Nous ne dirons rien ici de ces sortes d'équations.

337. On appelle *déterminé* tout problème, qui fournit autant d'équations, qu'il contient d'inconnues. C'est de ceux-là dont nous allons parler, en commençant d'abord par ceux qui ne renferment que deux inconnues. Or, dans ces problèmes, il peut arriver trois cas : 1.° que chaque inconnue n'entre que dans une équation, comme dans $ay + b = c$, $dx + e = f$; et alors on trouve la valeur de chacune, par les méthodes ci-dessus. 2.° Qu'une des inconnues entre dans une seule équation, et l'autre dans deux, comme dans $ax + by = c$, $dx + ey = f$. 3.° Que

chaque inconnue entre dans deux équations, comme dans $ax + by = c$, $dx + ey = f$.

Dans les deux derniers cas, on a deux méthodes pour trouver la valeur de chaque inconnue.

PREMIERE MÉTHODE.

(*) *Prendre les valeurs égales d'une même inconnue.*

338. 1.° *Dans chacune des deux équations données (que j'appelle* premières équations*), prenez à part la valeur d'une même inconnue.* 2.° *Egalez ensemble ces deux valeurs, et vous aurez une équation avec une seule inconnue, dont vous trouverez la valeur par les méthodes ci-dessus.* 3.° *Dans la plus simple des équations précédentes, substituez cette valeur à la place de l'inconnue, et vous aurez la valeur de l'autre.*

EXEMPLE.

Premières équations... $\left\{\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right\}$

Valeurs égales de x.... $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{c - by}{a} \\ x = \dfrac{f - ey}{d} \end{array}\right.$

Equation des valeurs égales de x..... $\left\{\dfrac{c - by}{a} = \dfrac{f - ey}{d}\right\}$

Valeur de y..... $\left\{y = \dfrac{af - cd}{ae - bd}\right\}$

Substituant cette valeur de y, il vient pour x.. $\left\{x = \dfrac{ce - bf}{ae - bd}\right.$

(*) ***Prendre la valeur d'une inconnue***, n'est pas la même chose que *trouver la valeur de cette inconnue.* On en prend la valeur en

SECONDE MÈTHODE.

Substituer la valeur d'une inconnue.

339. 1.° *Dans une des premières équations, prenez la valeur d'une inconnue, et l'écrivez à part.* 2.° *Dans l'autre équation, substituez cette valeur à la place de cette même inconnue; et vous aurez une équation avec une seule inconnue, dont vous trouverez la valeur. Dans l'équation mise à part, substituez cette valeur à la place de l'inconnue qu'elle représente, et vous aurez la valeur de l'autre.*

EXEMPLE.

Premières équations..... $\left\{\begin{array}{l} 2x+y=c \\ 4y-x=d \end{array}\right\}$ Valeur de y prise de la première..... $\left\{y=c-2x\right\}$

Valeur de y substituée dans la seconde.... $\left\{4c-9x=d\right\}$ Valeur de x substituée dans celle de y..... $\left\{y=c-\frac{8c+2d}{9}\right\}$

Valeur de x.... $\left\{x=\frac{4c-d}{9}\right\}$ Valeur de y... $\left\{y=\frac{c+2d}{9}\right\}$

340. SCOLIE. Quand il n'y a que deux inconnues, et quelquefois même quand il y en a trois, si l'on veut en éliminer quelqu'une, il est ordinairement plus simple de la rendre positive et de lui donner le même coëfficient partout, puis de soustraire une équation de l'autre. Or, pour donner dans deux équations le même coëfficient à une inconnue, *il faut multiplier chaque équation, par le coëfficient que cette inconnue a dans l'autre.* Ainsi dans

---

faisant d'elle seule un membre d'équation, de quelques quantités, soit connues, soit inconnues, que l'autre membre soit composé; mais on n'en trouve la valeur qu'autant qu'étant seule dans un membre d'equation, l'autre membre est composé de quantités toutes connues.

$ax + by = c$, $dx + cy = f$, je multiplie la première équation par d, la seconde par a, et j'ai $adx + bdy = dc$, $adx + acy = af$. Soustrayant la seconde de la première, j'ai $bdy - acy = dc - af$. Donc $y = \frac{dc - af}{bd - ac}$. Qu'on ne croie pas que cette valeur de y n'est pas la même que celle de l'exemple ci-dessus (338), quoique les signes soient tous différents; car on ne change ni l'espèce ni la valeur d'un quotient, en changeant à la fois tous les signes du dividende et du diviseur. Quelquefois on élimine une inconnue, en multipliant l'une par l'autre les deux équations où elle se trouve. Ainsi dans $a^2 x = \frac{y}{b}$ et $x = \frac{b^3}{y}$, en multipliant membre par membre, il vient $a^2 x^2 = b^2$; donc $x^2 = \frac{b^2}{a^2}$ et $x = \pm\frac{b}{a}$.

341. Quand un problème déterminé fournit trois équations et par conséquent trois inconnues, on peut commencer à en chasser une par l'une ou l'autre des méthodes que nous venons de donner; et ensuite on traite les deux autres, comme nous venons de le faire dans les équations à deux inconnues. Il y a des cas où l'une de ces méthodes abrège le calcul plus que l'autre: l'habitude seule peut les faire distinguer.

Si l'on emploie la première; *il faut* 1.° *Dans chacune des équations données, prendre la valeur de la même inconnue.* 2.° *Egaler ces valeurs deux à deux, et l'on aura deux équations avec deux inconnues, que l'on traitera par les méthodes précédentes.* Ayant ainsi trouvé la valeur d'une de ces inconnues, on la substituera dans celle des équations où elle se trouve avec une autre seulement, pour avoir la valeur de cette autre.

Si l'on emploie la seconde méthode; 1.° *On prendra dans une des premières équations la valeur d'une inconnue, pour la substituer dans chacune des autres; et l'on aura par là une inconnue et une équation de moins.* 2.° *Par ce que*

nous avons dit sur les équations à deux inconnues, on trouvera la valeur d'une inconnue, qu'on substituera dans les autres équations, pour avoir la valeur des autres inconnues.

342 EXEMPLE.

Premières équations..... $\left\{\begin{array}{l} ax - y = c \\ bz + x = d \\ ay + z = e \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{c+y}{a} \text{ Case A} \\ z = d - bz \end{array}\right\}$

Secondes équations..... $\left\{\begin{array}{l} \frac{c+y}{a} = d - bz \\ ay + z = e \end{array}\right\}$

$\left\{\begin{array}{l} z = \frac{d}{b} - \frac{c-y}{ab} = \frac{ad-c-y}{ab} \text{ Case B} \\ z = e - ay \end{array}\right\}$

Troisième équation..... $\left\{\frac{ad-c-y}{ab} = e - ay\right\}$

$\left\{a^2by - y = abe + c - ad \text{ Case C}\right\}$

Donc .... $\left\{\begin{array}{l} y = \frac{abe+c-ad}{a^2b-1} \\ z = \frac{a^2d-ac-e}{a^2b-1} \\ x = \frac{abc+be-d}{a^2b-1} \end{array}\right\}$

Dans cet exemple, l'inconnue x ne se trouvant pas dans toutes les équations, je prends ses deux valeurs (case A) dans la première et dans la seconde des équations données, et je fais ensuite $\frac{c+y}{a} = d - bz$. Comparant celle-ci avec la troisième des équations données, qui ne renferme également que y et z, j'ai les secondes équations.

Prenant dans celles-ci les valeurs de z (case B), j'en fais la troisième équation, qui se réduit en ôtant la fraction et transposant, à celle de la case C. Enfin, dans celle-ci, je trouve la valeur de y, en divisant tout par $a^2 b - 1$ (325). Substituant pour y dans $z = e - ay$ (case B), j'ai la valeur de z. Substituant cette dernière pour z dans $x = d - bz$ (case A), j'ai la valeur de x.

343. SCOLIE. Les équations du premier degré présentent deux remarques essentielles à faire.

1.° Il arrive quelquefois que, sans s'en apercevoir, on met quelque contradiction dans les premières équations d'un problème, ce qui suffit pour en rendre la solution impossible. Alors le calcul mène à une équation absurde, comme serait celle-ci, $20 = 30$. Soient, par exemple, ces deux équations $x - y = 30$, $x + 10 = y + 100$: prenant les deux valeurs de x, on a $x = 30 + y$, $x = 90 + y$; et les égalant on a $30 + y = 90 + y$, ou bien ôtant y, $30 = 90$: équation absurde, qui m'indique que le problème qui a fourni les deux premières équations, est impossible ; ou bien que ses conditions sont contradictoires, et qu'ainsi la question n'est pas *proposable*.

2.° Quelquefois encore on construit mal les premières équations d'un problème ; de telle sorte qu'elles ne sont pas absolument indépendantes entre elles. Cela arrive lorsque l'une s'ensuit de quelques autres combinées ensemble, soit en les multipliant ou les divisant par elles-mêmes ou par quelque quantité connue, soit en leur ajoutant ou retranchant quelque valeur connue. Alors la suite du calcul fait trouver autant d'équations *identiques* (c'est-à-dire *ridicules*, puisqu'elles n'apprennent rien), qu'il y a de ces défauts dans la construction. Ainsi dans $5x + y = 100$ et $10y + 50x = 1000$, en prenant les deux valeurs de y, on trouve cette équation identique $1000 = 1000$; parce que la seconde équation n'est autre chose que la première, multipliée par 10.

344. PROBLÈME I. A *dit à* B, *il y a sept ans que j'é-*

tais trois fois plus âgé que vous, et dans 7 ans j'aurai précisément le double de votre âge : on demande l'âge actuel de A *et de* B.

SOLUTION. Soit x l'âge de A, y celui de B. Sept ans auparavant, l'âge de A était donc $x-7$, et celui de B, $y-7$; au lieu que 7 ans après, le premier sera $x+7$, et le second $y+7$. Or, par la première condition, $x-7 = \overline{y-7} \times 3$; et par la seconde $x+7 = \overline{y+7} \times 2$. Soustrayant la première équation de la seconde, j'ai $14 = 2y + 14 - 3y + 21$. Transposant les termes affectés de y, et réduisant, j'ai $y = 21$. Substituant ensuite cette valeur pour y, dans la première équation, j'ai $x-7 = 63-21$; donc $x = 49$; et ces deux âges satisfont aux conditions du problème.

345. PROBLÈME II. *Trouver une fraction telle que, si on ajoute* 1 *au numérateur, elle vaille* $\frac{1}{3}$ *; et que si on ajoute* 1 *au dénominateur, elle ne vaille que* $\frac{1}{4}$.

SOLUTION. Soit cette fraction $\frac{x}{y}$: suivant la première condition $\frac{x+1}{y} = \frac{1}{3}$, et suivant la seconde $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{4}$. Otant les fractions on a, $3x+3 = y$ et $4x = y+1$, ou bien $y = 4x-1$: Egalant ces deux valeurs de y, il vient $3x+3 = 4x-1$; donc $x = 4$. Substituant à la place de x dans $y = 4x-1$, on trouve, $y = 15$. Donc $\frac{x}{y} = \frac{4}{15}$, qui devient, dans un cas, $\frac{5}{15}$ ou $\frac{1}{3}$, et dans l'autre $\frac{4}{16}$ ou $\frac{1}{4}$.

346. PROBLÈME III. *Un marchand achète trois sortes de marchandises* A, B, C*: le prix de la première, avec la moitié du prix des deux autres, vaut* 51 *fr. : il en est de*

même du prix de la seconde, avec le tiers du prix des deux autres, et du prix de la troisième, avec le quart du prix des deux autres. On demande le prix de chaque marchandise en particulier.

SOLUTION. Supposons que le prix de A soit exprimé par x, celui de B, par y : celui de C, par z : et 51 fr. par a. Puisque d'après la première condition, le prix de A joint à la moitié du prix des deux autres, vaut 51 fr. ; on a cette équation $x + \frac{y+z}{3} = a$. Puisque le prix de B, avec le tiers du prix de A et de C, vaut également 51 fr., on a encore, $y + \frac{x+z}{3} = a$; et enfin, puisque le prix de C, avec le quart des prix de A et de B, vaut aussi 51 fr. on a cette troisième équation, $z + \frac{x+y}{4} = a$. Ainsi, toutes les conditions sont exprimées par les trois équations de la première case ci-après. Otant les fractions et mettant les x seuls d'un côté, en les rendant positifs, on a les trois valeurs de x (case 2). Egalant la première valeur à la seconde, et celle-ci à la troisième, on a, en plaçant les y du même côté, les équations de la case 3. Prenant ici les deux valeurs de y, on a une équation (case 4) qui ne contient que z ; et ôtant les fractions on a, en transposant, $z = \frac{13}{17} a$. Substituant cette valeur dans une des équations de la case 3, on trouve que $y = \frac{11}{17} a$; et enfin, substituant les valeurs de y et de z dans une des équations de la case 2, on a $x = \frac{5}{17} a$. De sorte que a étant 51 francs., $x = 15$ fr. $y = 33$ fr. $z = 39$ fr.

Case 1.	Case 2.
$x + \frac{y+z}{2} = a$	$x = \frac{2a - y - z}{2}$
$y + \frac{x+z}{3} = a$	$x = 3a - 3y - z$
$z + \frac{x+y}{4} = a$	$x = 4a - 4z - y$

Case 3.	Case 4.
$5y = 4a - z$	$\frac{4a - z}{5} = \frac{3z - a}{2}$
$2y = 3z - a$	

Valeurs de ..... $\left\{ \begin{array}{l} z = \frac{13}{17}\, a \\ y = \frac{11}{17}\, a \\ x = \frac{5}{17}\, a \end{array} \right\}$

347. Nous allons placer ici quelques problèmes, sur lesquels les commençants pourront s'exercer.

PROBLÈME IV. Trouver deux nombres tels que la douzième partie du premier étant ajoutée au quart du second, la somme soit 6; et que le tiers du premier soustrait du second, la différence soit également 6.

PROBLÈME V. On demande trois nombres qui, ajoutés deux à deux, donnent pour sommes trois nombres connus a, b, c.

PROBLÈME VI. Une quantité a étant donnée, on demande de la partager en un nombre n de parties, de telle grandeur, que la plus petite soit surpassée d'une quantité donnée par chacune des autres.

PROBLÈME VII. Quelqu'un est convenu d'acheter tous les poissons d'une certaine espèce, à raison de 5 sols par pouce de longueur : on lui en présente un, dont la tête à 12 pouces ; dont le corps est les deux tiers de la tête et de la queue, et dont la queue est les $\frac{1}{11}$ du corps et de la tête. On demande le prix de ce poisson.

PROBLÈME VIII. En 1780, on demandait à quelqu'un l'âge qu'il avait ; il répondit : si j'étais né deux ans plus tard, je pourrais dire : ajoutez la moitié des années qui se sont écoulées depuis le commencement de ce siécle, jusqu'à celle de ma naissance, au quart de celles qui s'écouleront depuis ma naissance jusqu'à la fin du siécle, et vous aurez mon âge. On demande quel était cet âge.

PROBLÈME IX. Trois joueurs A, B et C, avaient devant eux un tas d'écus qu'ils avaient gagnés ensemble, et qu'ils devaient partager à ces conditions : que A en aurait la moitié, B le tiers, et C la sixième partie. Mais ayant eu dispute entre eux, il se jetèrent sur le tas et chacun en enleva ce qu'il put. Quelque temps après, ils se calmèrent et firent un nouveau tas d'écus, dans lequel A ayant remis le tiers de ce qu'il avait enlevé, B le quart, et C la cinquième partie, la somme fut 174 écus. Alors ils partagèrent ce tas par portions égales, et sans employer d'autre monnaie, chacun se trouva avoir la part qui devait lui revenir, d'après leur accord. On demande combien il y avait d'écus dans le premier tas, et combien chacun en avait enlevé.

CHAPITRE IV.

De quelques propriétés générales des équations composées.

348. On appelle en général *équations composées*, toutes celles qui sont au dessus du premier degré ; parce qu'on peut les représenter, ou du moins qu'on les représente, comme le produit de plusieurs facteurs, dont chacun contient l'inconnue. Voici des exemples de ces sortes d'équations, dans lesquels on a d'abord indiqué les facteurs qu'il faut multiplier, et l'on a ensuite placé leurs produits au dessous.

EXEMPLES.

I. $\begin{cases} \text{Facteurs.....} (x+a)\,(x+b)=0 \\ \text{Produit.....} x^2+(a+b)\,x+ab=0 \end{cases}$

II. $\begin{cases} \text{Facteurs...} (x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})=0 \\ \text{Produit....} x^2-2ax+a^2=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +b^2 \end{cases}$

III. $\begin{cases} \text{Facteurs..} (x+a)\,(x-b)\,(x+c)=0 \\ \text{Produit.} x^3+(a-b+c)\,x^2+(-ab+ac-bc)\,x-abc=0 \end{cases}$

IV. $\begin{cases} \text{Facteurs...} (x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x-b)=0 \\ \text{Produit....} x^3-bx^2+a^2x-a^2b=0 \end{cases}$

Dans ces exemples, les quantités qui multiplient les puissances de x, sont appelées les coëfficients des différents termes de l'équation. Ainsi dans l'exemple III, $a-b+c$ est le coëfficient de x^2 ou du second terme : $-ab+ac-bc$ est le coëfficient du troisième. Quelquefois on écrit les parties de ces coëfficients les unes sous les autres

(voy. n.° 319); et quand il y a un terme qui manque, on met l'astérique * à sa place de cette manière $x^3 * + px + q = 0$. Mais de quelque façon qu'on arrange une équation, on conclura :

349. 1.° *Qu'elle a autant de racines ou de valeurs de l'inconnue, qu'il y a d'unités dans l'exposant du degré auquel elle appartient;* ou bien, que celles du second degré ont deux racines; celles du troisième, trois; celles du quatrième, quatre, etc. Car on doit admettre autant de valeurs de l'inconnue qu'il y a de nombres, qui, substitués à sa place, peuvent remplir la condition énoncée par l'équation, laquelle consiste en ce que son premier membre devienne zéro, lorsque tous les termes sont d'un seul côté. Or, dans le premier exemple, si l'on met à la place de x ou $-a$, ou $-b$, le premier membre de l'équation devient zéro. Car en mettant $-a$, on suppose que $x = -a$, ou que $x + a = 0$; et en mettant $-b$, on suppose que $x = -b$, ou que $x + b = 0$. Donc dans l'un et dans l'autre cas, un des facteurs est 0; et par conséquent le produit qui en résultera, sera 0. On voit assez qu'il en est de même pour les cas où quelque facteur de l'équation est imaginaire. Car si, dans le troisième exemple, je fais $x = -a\sqrt{-1}$, le facteur $x + a\sqrt{-1}$ est 0; et par conséquent tout le premier membre devient 0. Ainsi, quoiqu'on ne puisse pas dire que dans ce cas (et il en est de même des autres) x vaille à la fois $-a\sqrt{-1}$, $+a\sqrt{-1}$, et $+b$, l'on a cependant à choisir parmi ces valeurs, et x vaudra une d'elles indifféremment.

350. 2.° *Quand on met tous les termes d'une équation d'un seul côté, les racines s'y présentent avec un signe contraire à celui qu'elles ont en effet.* Ainsi dans le premier exemple, a et b se présentent avec le signe $+$, tandis que les valeurs de x sont, ou $-a$ ou $-b$.

351. PROBLÈME I. *Oter toutes les fractions d'une équation, sans donner un coëfficient au premier terme.*

SOLUTION.

SOLUTION. *Substituez à l'inconnue de l'équation donnée, une autre inconnue divisée par le produit de tous les dénominateurs, et multipliez ensuite l'équation par le dénominateur du premier terme.*

Ainsi dans $x^3 + \frac{x^2}{a} + \frac{x}{b} + \frac{p}{c} = 0$, je fais d'abord $x = \frac{y}{abc}$, et substituant pour x j'ai $\frac{y^3}{a^3 b^3 c^3} + \frac{y^2}{a^2 b^2 c^2} + \frac{y}{ab^2 c} + \frac{p}{c} = 0$: multipliant ensuite par le dénominateur du premier terme, j'ai cette équation délivrée de fractions $y^3 + bcy^2 + a^2 bc^2 y + a^3 b^3 c^2 p = 0$.

352. PROBLÈME II. *On demande à quelles conditions on peut changer une équation en une autre qui la représente exactement, et où il manque un terme quelconque, excepté le premier.*

SOLUTION. Soit l'équation du troisième degré, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$: supposons que l'inconnue x soit représentée par une autre inconnue y, à laquelle on a ajouté une quantité indéterminée n; de façon que $x = y + n$, ce qui donnera :

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 3ny^2 + 3n^2 y + n^3 \\ px^2 &= \ldots\ldots\ py^2 + 2pny + pn^2 \\ qx &= \ldots\ldots\ldots\ qy + qn \\ r &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ r \end{aligned}$$

La nouvelle équation qui vient de là, et qu'on appelle la *transformée*, sera donc

$$\left.\begin{matrix} y^3 + 3n \\ \quad + p \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y^2 + 3n^2 \\ \quad + 2np \\ \quad + q \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y + n^3 \\ \quad + n^2 p \\ \quad + nq \\ \quad + r \end{matrix}\right\} = 0$$

Or, pour faire disparaître le second terme dans celle-ci, il n'y a qu'à supposer son coëfficient $3n + p = 0$; ce qui

donnera pour la valeur de l'indéterminée $n = -\frac{p}{3}$.

Pour faire disparaître le troisième terme, on supposera $3n^2 + 2pn + q = 0$; et en résolvant cette équation du second degré, on trouvera la valeur de l'indéterminée n, qui produirait ce changement. Pour faire disparaître le dernier terme, on supposerait $n^3 + pn^2 + qn + r = 0$; et la solution de cette équation du troisième degré donnerait la valeur de n : ce qui prouve que, *pour faire disparaître le dernier terme d'une équation, la difficulté est du même degré que pour résoudre l'équation proposée.* Aussi ne cherche-t-on qu'à faire disparaître le second; ce qui se fait toujours *en substituant à l'inconnue de la proposée, une autre inconnue de laquelle on a soustrait le coëfficient de ce second terme, divisé par l'exposant de l'équation.*

353. THÉORÈME I. *Si le premier terme d'une équation n'a d'autre coëfficient que l'unité, celui du second est égal à la somme des racines, prises avec un signe contraire : celui du troisième, à la somme des produits des racines, prises deux à deux; celui du quatrième, à la somme des produits des racines, prises trois à trois, etc. Enfin, le dernier terme est égal au produit de toutes les racines, toujours prises avec un signe contraire.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que toutes les racines soient égales, que chacune soit a, et qu'il y en ait un nombre n. On formera donc alors l'équation composée du produit d'un nombre n de facteurs, dont chacun sera $x - a$; ce qui donnera $(x - a)^n$, ou bien (137),

$$x^n - nax^{n-1} + \frac{n.n-1}{2} a^2 x^{n-2} - \frac{n.n-1.n-2}{2.3} a^3.x^{n-3} \ldots \pm a^n = 0.$$

Or, ici le coëfficient du second terme, ou bien le facteur na qui multiplie x^{n-1}, est la somme de toutes les racines; puisque chacune est a, et que leur nombre est n. Le coëfficient du troisième terme, savoir, $\frac{n.n-1}{2} a^2$, est la somme de tous les produits qu'on peut faire, en

prenant les racines deux à deux ; car chacun de ces produits serait a^2, et leur nombre serait $\frac{n.n-1}{2}$ (315). Il en serait de même pour les autres termes, jusqu'au dernier qui, étant $\pm a^n$, serait évidemment le produit de toutes les racines. Ainsi le théorème est démontré dans le cas où toutes les racines seraient égales. Mais en les supposant inégales, on ne peut changer, ni le nombre des termes qui forment les divers coëfficients de x, ni le nombre des lettres qui entrent dans ces termes ; puisque l'on multiplie toujours un égal nombre de facteurs, les uns par les autres, pour former l'équation. Donc le théorème est vrai dans tous les cas.

354. Corollaire. *Si une équation a pour racine un nombre entier, il faut donc que ce nombre se trouve parmi les diviseurs du dernier terme.* Mais comme ces diviseurs sont quelquefois en fort grand nombre, il peut y avoir des cas où il serait trop long de les essayer tous, c'est-à-dire, de les substituer les uns après les autres à x, pour savoir quels sont ceux qui réduisent le premier membre à 0, en supposant tous les termes de ce côté. C'est pourquoi nous donnerons plus bas une méthode qui abrége ce tâtonnement. Mais avant d'en venir là, on doit observer que si l'inconnue entre dans tous les termes de l'équation, une des racines est 0 ; puisqu'en substituant une telle valeur pour x, on réduit tout à zéro. Ainsi dans $x^3 - ax^2 + bx = 0$, en divisant par $x \pm 0$, on a $x^2 - ax + b = 0$.

355. Théorème II. *Si une équation ne contient ni fractions ni radicaux, et que son premier terme ait l'unité pour coëfficient, aucune de ses racines commensurables ne peut être une fraction.*

Démonstration. Soit l'équation d'un degré quelconque $x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - \text{etc.} \ldots + t = 0$; qu'une de ses racines soit, s'il se peut, la fraction $\frac{c}{d}$, qu'on suppose réduite à sa plus simple expression. En substituant cette

racine pour x, l'équation se changera en celle-ci, $\frac{c^m}{d^m} - \frac{ac^{m-1}}{d^{m-1}} + \frac{bc^{m-2}}{d^{m-2}} - \text{etc.} \ldots + t = 0$. Multipliant tous ses termes par d^{m-1}, et laissant le premier seul dans un membre, on a $\frac{c^m}{d} = ac^{m-1} - bc^{m-2}d + \text{etc.} \ldots - td^{m-1}$; dans laquelle le second membre étant un entier, le premier doit l'être aussi. Or, cela ne peut arriver qu'en faisant $d = 1$, ce qui détruit la supposition que $\frac{c}{d}$ soit une fraction; ou bien, en faisant que c^m soit divisible par d; d'où il s'ensuivrait que c et d auraient un diviseur commun (86), et que la fraction $\frac{c}{d}$ ne serait pas réduite à ses plus petits termes (ce qui est également contre la supposition). Il répugne donc que dans ce cas aucune racine commensurable soit fractionnaire.

356. REMARQUE. C'est avec raison qu'on a borné cette propriété aux équations qui ont toutes leurs racines commensurables; car on en trouve une infinité qui, avec toutes les conditions qu'exige le théorème précédent, ont des racines fractionnaires, mais incommensurables. Telles sont celles-ci : $x^2 - x - 3 = 0$, $x^2 - x - 1 = 0$, dont la première a pour racines $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$; et la seconde, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

357. COROLLAIRE. *On peut donc réduire une équation à n'avoir que des nombres entiers pour racines commensurables.* Il suffit pour cela d'en ôter les fractions, sans donner un coëfficient au premier terme; et alors ces racines se trouveront parmi les diviseurs du dernier. *Si donc aucun de ces diviseurs ne peut être pris pour une racine, on conclura que l'équation proposée n'en a aucune qui soit commensurable;* et qu'ainsi elles sont toutes incommensurables ou imaginaires. Alors il faudra, pour les exprimer (au moins

dans les quatre premiers degrés), avoir recours à des règles que nous donnerons plus bas.

Mais avant d'aller plus loin, il faut savoir distinguer parmi les diviseurs du dernier terme, quels sont ceux qui peuvent être pris pour des racines de l'équation. On a sur cela deux méthodes, l'une est celle que Newton a donnée le premier dans son arithmétique universelle, et qu'on peut voir dans la troisième partie de l'algèbre de Clairaut; l'autre a été découverte depuis, et c'est celle-là que nous allons exposer ici.

358. Problème III. *Trouver les conditions auxquelles on reconnaîtra qu'un des diviseurs du dernier terme est une racine de l'équation, après qu'on en a ôté les fractions, sans donner un coëfficient au premier terme.*

Solution. Soit l'équation du quatrième degré $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$: supposons la représentée par $x^4 + (a+b+c+d)\,x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)\,x^2 + (abc+abd+acd+bcd)\,x + abcd = 0$, dans laquelle les quatre racines sont évidemment (353) a, b, c, d. Soit n une des racines de la première équation, de sorte que l'on aura $n = a$, ou b, ou c, ou d : supposons $n = a$.

1.° Puisque l'une des équations ci-dessus représente l'autre, il faut que les coëfficients des mêmes puissances de x soient égaux dans chacune; ou bien il faut que $s = abcd$. Or, ici le second membre est divisible par a ; donc l'autre doit l'être aussi par a, ou par son égale n ; ce qui donnera $\frac{s}{n} = \frac{abcd}{a} = bcd$ (c'est ce que j'appelle *le premier quotient*). Ainsi on a pour première condition, *que le dernier terme de la proposée soit divisible par* n.

2.° Puisque d'après la supposition, $r = abc + abd + acd + bcd$; en soustrayant la dernière équation de celle-ci, on a $r - \frac{s}{n} = abc + abd + acd$. Or, ici le second membre est divisible par a ; donc l'autre, qui est évidemment la

différence du premier quotient $\left(\frac{s}{n}\right)$ soustrait du coëfficient de x, savoir de r, sera aussi divisible par a, ou par son égale n ; et l'on aura $\frac{r}{n} - \frac{s}{n^2} = bc + bd + cd$ (c'est là le *second quotient*) ; on a donc pour seconde condition, *que le premier quotient étant soustrait du coëfficient de* x, *la différence soit divisible par* n.

3.° Puisque $q = ab + ac + ad + bc + bd + cd$, en soustrayant la dernière équation de celle-ci, on a $q - \frac{r}{n} + \frac{s}{n^2} = ab + ac + ad$. Or, ici le second membre est divisible par a ; donc l'autre (qui vaut la différence du second quotient soustrait de q, coëfficient de x^2) sera divisible par a, ou par son égale n ; et faisant cette division on a $\frac{q}{n} - \frac{r}{n^2} + \frac{s}{n^3} = b + c + d$ (c'est là le *troisième quotient*) ; ainsi il vient pour troisième condition *que le second quotient étant soustrait du coëfficient de* x^2, *la différence soit divisible par* n.

4.° Puisque $p = a + b + c + d$, soustrayant la dernière équation de celle-ci, on a $p - \frac{q}{n} + \frac{r}{n^2} - \frac{s}{n^3} = a$. Or, ce dernier membre divisé par a, donne 1 pour quotient ; il faut donc que l'autre membre, qui n'est autre chose que la différence du troisième quotient soustrait du coëfficient de x^3 ou du second terme, étant divisé par n, donne 1 pour quotient. Quatrième et dernière condition : *que le troisième quotient étant soustrait du coëfficient du second terme et divisé par* n, *le quotient soit* 1.

EXEMPLES.

359. On demande quelles sont les racines commensurables de l'équation $x^4 + 3x^3 + 7x + 21 = 0$. Pour cela je prends tous les diviseurs du dernier terme, savoir,

1, 3, 7, tant en + qu'en —, et je les essaye en commençant par 1. Or, $\frac{21}{1} = 21$. Ce premier quotient soustrait du coëfficient suivant, qui est 7, et divisé par 1, donne $\frac{7-21}{1} = -14$. Ce second quotient soustrait de 3, et divisé par 1, donne $\frac{3+14}{1} = 17$. Ainsi 1 n'est pas bon, puisque la dernière condition manque (Voy. le 4.° du n.° précédent).

Il est assez clair sans examen, que —1 ne saurait réussir. Examinons 3. $\frac{21}{3} = 7$, $\frac{7-7}{3} = 0$, $\frac{3-0}{3} = 1$. Ainsi 3 est un diviseur qui doit réussir, puisqu'il remplit toutes les conditions; il faut donc que l'équation soit divisible par $x+3$; et en effet on trouve pour quotient x^3+7.

Soit encore l'équation $x^3+12x^2+41x+30=0$, dont on cherche les racines parmi les diviseurs du dernier terme. Or, ces diviseurs sont 15, 10, 6, 5, 3, 2, 1, qu'il faut essayer en détail, et commençant par 15, je dis: $\frac{30}{15} = 2$: $\frac{41-2}{15}$ ne donne point un quotient exact; ainsi 15 manque à la seconde condition. Passant ensuite à 10, je vois que $\frac{30}{10} = 3$, que $\frac{41-3}{10}$ n'a point de quotient exact; et qu'ainsi 10 doit être rejeté. Essayant 6, je trouve $\frac{30}{6} = 5$; $\frac{41-5}{6} = 6$, $\frac{12-6}{6} = 1$; et par conséquent 6 doit être une racine, puisqu'il remplit toutes les conditions. Il en est de même de 5, puisque $\frac{30}{5} = 6$, $\frac{41-6}{5} = 7$, $\frac{12-7}{5} = 1$; au lieu que 3 manque à la seconde condition; car $\frac{30}{3} = 10$ et $\frac{41-10}{3}$ n'est plus divisible: pareillement 2 manque à la dernière; puisque $\frac{30}{2} = 15$

$\frac{41-15}{2}=13$, $\frac{12-13}{2}=-\frac{1}{2}$. Venant enfin à 1, on trouve que $\frac{30}{1}=30$, $\frac{41-30}{1}=11$, $\frac{12-11}{1}=1$; et qu'ainsi 1 est une troisième racine, ou bien que l'équation est composée des trois facteurs $(x+6)(x+5)(x+1)$; comme il est aisé de s'en convaincre, en multipliant ces facteurs les uns par les autres.

360. REMARQUE. Si l'on fait attention à la solution du problème précédent, on verra que, quand les diviseurs qu'on essaye doivent réussir, les quotients successifs sont les coëfficients que doit avoir l'équation, étant divisée par un de ses facteurs, ou abaissée d'un degré; et qu'ils font connaître par conséquent combien il doit y avoir de termes dans l'équation ainsi abaissée. Dans le premier exemple, les quotients 1, 0, 7, nous font comprendre qu'il ne doit rester que deux termes dans l'équation, si on la divise par $x+3$; et que ces deux termes se présenteront ainsi, $1x^2+7=0$. Dans le second exemple, si on s'était arrêté au diviseur 6 qui a réussi; ou bien si l'on eût divisé l'équation proposée par $x+6$, je vois par les trois quotients 1, 6, 5, que l'équation ainsi abaissée d'un degré, aurait été $1x^2+6x+5=0$. *Cette méthode fait donc trouver, sans calcul, l'équation, qui doit être d'un dégré au dessous de la proposée.*

361. THÉORÈME III. *Si une équation ne présente point de radical, je dis:* 1.° *que ses racines imaginaires seront en nombre pair:* 2.° *qu'en les prenant deux à deux, si l'une a la forme* $m+n\sqrt{-1}$, *l'autre doit avoir la forme* $m-n\sqrt{-1}$.

DÉMONSTRATION. 1.° Quelles que soient ces racines, elles peuvent (205 et 206) être ramenées à la forme $\pm m \pm n\sqrt{-1}$. Or, si de pareilles racines n'étaient pas en nombre pair, il faudrait multiplier, dans le dernier terme, un nombre impair de facteurs de la forme $\pm n\sqrt{-1}$,

les uns par les autres ; donc $\sqrt{-1}$ s'y trouverait élevée à quelque puissance impaire ; et par conséquent (198) la forme imaginaire ne disparaîtrait pas, ce qui est contre la supposition. Donc, 1.° etc.

2.° Si en les prenant deux à deux, l'une a la forme $m+n\sqrt{-1}$, l'autre aura celle-ci $m-n\sqrt{-1}$. Car si les termes imaginaires n'étaient pas semblables et affectés de signes contraires, ils ne se détruiraient pas, en les ajoutant ensemble dans le coëfficient du second terme, et là l'équation présenterait des radicaux : pareillement, si la partie réelle m n'était pas la même dans chacune, ou qu'elle eût différents signes, le dernier terme de l'équation présenterait quelque radical : puisque $+n\sqrt{-1}$ et $-n\sqrt{-1}$ n'y étant pas multipliés par la même quantité réelle, les produits ne pourraient point se détruire. Ainsi l'équation ne paraîtrait point délivrée de radicaux, ce qui est encore contre la supposition. Donc, etc.

362. COROLLAIRE. *Si une équation de degré impair ne présente point de radicaux, elle doit donc contenir quelque racine réelle* ; puisqu'autrement les imaginaires y seraient en nombre impair.

CHAPITRE V.

Des équations pures de tous les degrés et de celles du second en particulier.

363. Nous appelons *équations pures* celles qui ne contiennent qu'une même puissance de l'inconnue, comme par exemple, $x^3-a^3=0$. On les appelle aussi *équations a deux termes*, parce qu'en effet elles peuvent toujours être réduites à n'en avoir que deux, dont l'un contiendra l'inconnue, et l'autre sera composé de quantités toutes connues. Ainsi $ax^2+bx^2-c=0$ devient, en divisant

par $a+b$, $x^1-\frac{c}{a+b}=0$: $ax^m+bx^m+cx^m-d=0$, en divisant par tout ce qui multiplie x^m, devient $x^m-\frac{d}{a+b+c}=0$.

La règle générale pour résoudre ces sortes d'équations, de quelque degré qu'elles soient, c'est *de laisser l'inconnue seule dans un membre (en observant cependant de la rendre positive, si son exposant est pair), et d'extraire, de part et d'autre, la racine analogue à cette puissance de l'inconnue.* Ainsi $ax^2-b=0$, en divisant par a, et transposant, devient $x^2=\frac{b}{a}$; et extrayant la racine quarrée des deux côtés, $x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$: de même $x^3+c^3=0$, donne $x^3=-c^3$, et $x=-c$: $x^m+ax^m-b=0$, en divisant par le facteur $1+a$ (114) et transposant, devient $x^m=\frac{b}{1+a}$: extrayant la racine m des deux membres, $x=\sqrt[m]{\frac{b}{1+a}}$.

364. REMARQUES IMPORTANTES. Il faut observer ici que, *dans toutes les équations pures d'un degré pair, si x a une valeur réelle, elle en a une autre qui ne diffère de la première que par le signe, et qu'elle n'en peut avoir davantage.* Ainsi dans $x^4-16=0$ ou $x^4=16$, on a $x=\pm\sqrt[4]{16}$; ce qui donne pour valeurs réelles de x, ou $+2$, ou -2; puisqu'on a également 16, soit avec $(+2)^4$, soit avec $(-2)^4$. Mais comme aucun nombre réel autre que $+2$ ou -2, élevé à sa quatrième puissance, ne peut donner 16; on en conclura que ce sont là les seules racines réelles de $x^4=16$; et qu'ainsi les deux autres qu'elle doit contenir (349), sont imaginaires.

Pour découvrir ces imaginaires, on divisera l'équation proposée $x^4-16=0$, par chacun de ses deux facteurs $x+2$, $x-2$; ou bien par leur produit x^2-4; et le quo-

tient sera une équation du second degré, qui contiendra les deux racines imaginaires, que nous cherchons. Voici le détail de ce calcul :

$$\left.\begin{array}{r} x^4 - 16 \\ -x^4 + 4x^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 - 4 \ldots\ldots \text{ Diviseur.} \\ \hline x^2 + 4 \ldots\ldots \text{ Quotient.} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x^2 - 16 \\ -4x^2 + 16 \end{array}\right\}$$

Si l'on cherche ensuite les racines de l'équation $x^2 + 4 = 0$, on trouvera $x = \pm\sqrt{-4}$, ou bien (195) $x = +2\sqrt{-1}$ ou $-2\sqrt{-1}$. Ainsi les quatre racines de la proposée sont $+2$, -2, $+2\sqrt{-1}$, $-2\sqrt{-1}$; et l'on peut encore s'en convaincre, en les substituant successivement à la place de x dans $x^4 - 16 = 0$; car on trouvera qu'elles donnent chacune $16 - 16 = 0$; c'est-à-dire, qu'elles remplissent la condition énoncée par l'équation, laquelle consiste en ce que son premier membre devienne zéro. Cela confirme aussi ce que nous avons dit ailleurs (146) sur le nombre des racines d'une puissance; car on voit qu'il y a quatre quantités différentes, savoir, $+2$, -2, $+2\sqrt{-1}$, $-2\sqrt{-1}$, qui sont les racines quatrièmes de 16. En général, toute équation de cette forme $x^4 - a = 0$, doit avoir deux racines réelles, qui sont $+\sqrt{+\sqrt{a}}$ ou $+\sqrt[4]{a}$, et $-\sqrt{(+\sqrt{a})}$ ou $-\sqrt[4]{a}$; et deux imaginaires, qui sont $+\sqrt{(-\sqrt{a})}$ et $-\sqrt{(-\sqrt{a})}$; au lieu que celle qui prend cette forme $x^4 + a = 0$, a toutes ses racines imaginaires; lesquelles sont renfermées dans cette expression $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-a}}$; puisque $x^4 = -a$ donne $x^2 = \pm\sqrt{-a}$. Donc $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-a}}$ (nous parlerons plus bas du nombre et de la forme des racines imaginaires, dans les équations pures d'autres degrés).

365. Si une équation du second degré est *complète*, c'est-à-dire, si elle contient la première et la seconde puis-

sance de l'inconnue, avec un terme tout connu, on a alors deux manières de la résoudre. La première consiste *à faire disparaître son second terme* (352), *et à traiter la transformée qui en viendra, suivant la méthode que nous venons de donner pour les équations pures de tous les degrés.*

Soit, par exemple, l'équation $x^2 + px + q = 0$. Je commence par faire disparaître son second terme, en substituant $y - \frac{p}{2}$ à la place de x, ou bien en supposant que $x = y - \frac{p}{2}$; et j'aurai,

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 - py + \frac{p^2}{4} \\ px &= \quad py - \frac{p^2}{2} \\ q &= \quad\quad q \end{aligned}$$

Ainsi la transformée devient $y^2 - \frac{1}{4}p^2 + q = 0$; laissant donc l'inconnue seule dans un membre et toutes les connues dans l'autre, j'ai $y^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$: extrayant la racine quarrée d'une et d'autre part, $y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$: substituant cette valeur à la place de y dans $x = y - \frac{p}{2}$, j'ai enfin $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, c'est-à-dire, que pour une valeur de x je prendrai $-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, et pour l'autre, $-\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$.

Mais au lieu de cette méthode, dont nous n'avons parlé que pour faire une application des principes précédents, on suit ordinairement la règle suivante pour résoudre ces sortes d'équations.

366. RÈGLE 1.° *Rendez le premier terme* (*) *positif, s'il est négatif, et ne lui laissez d'autre coëfficient que l'unité* (351). 2.° *Ne laissez dans le premier membre que les termes affec-*

(*) On ne doit pas oublier que le premier terme d'une équation est celui qui contient la plus haute puissance de l'inconnue (323).

tés de x, *et faites de ce membre un quarré complet, en lui ajoutant le quarré de la moitié de la quantité connue, qui multiplie la première puissance de l'inconnue* (155). 3.° *Pour conserver l'égalité, ajoutez autant à l'autre membre, et après avoir extrait la racine quarrée des deux, vous aurez, en transposant, les valeurs de* x.

Exemples.

367. On demande les racines de cette équation $x^2 + px + q = 0$, qui peut représenter toutes les équations du second degré. Pour les trouver, je place d'abord d'un même côté les termes affectés de x, ce qui donne $x^2 + px = -q$; et comme le premier membre n'est pas un quarré complet, je le complète (155) en lui ajoutant le quarré de $\frac{1}{2}p$ qui est $\frac{1}{4}p^2$, que j'ajoute aussi à l'autre membre, pour conserver l'équation; ce qui donne $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$: extrayant la racine quarrée, que je sais (155) être d'un côté $x + \frac{1}{2}p$, et l'indiquant de l'autre, j'ai $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$: enfin en transposant, $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, ce qui désigne qu'une valeur de x est $-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, et que l'autre est $-\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$.

Soit l'équation $x^2 + 5x - 14 = 0$. Pour la résoudre, je me sers de l'exemple précédent, comme d'une formule dans laquelle je substitue 5 pour p et -14 pour q, ce qui donne $x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 14} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = -7$ ou $+2$.

Soit encore l'équation $x^2 + 4x + 5 = 0$, laquelle étant comparée à la formule ci-dessus, donne $p = 4$ et $q = 5$; donc en substituant dans la solution, on a $x = -2 \pm \sqrt{-1}$, ce qui présente deux valeurs imaginaires de x.

368. Par la méthode que nous venons de donner pour le second degré, et par ce que nous avons dit plus haut (363) sur les équations pures, on peut résoudre une classe fort étendue d'équations d'un dégré quelconque; savoir, *toutes celles qui ont seulement deux termes affectés de l'inconnue, et dans lesquels l'exposant de* x *est le double dans*

l'un de ce qu'il est dans l'autre. En effet, toutes les équations de cette classe peuvent être représentées par celle-ci, $x^{2m} \pm px^m \pm q = 0$ (en supposant que p et q représentent des quantités connues). Or, si on considère d'abord dans celle-ci x^m comme l'inconnue, on n'a qu'une équation du second degré, dans laquelle on trouve, par la méthode de ce degré, $x^m = \mp\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 \mp q}$; et extrayant ensuite la racine m des deux côtés, on a . . . . . $x = \sqrt[m]{[\mp\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 \mp q}.]}$

Soit l'équation $x^6 + 4x^3 - 96 = 0$, qui est évidemment de la classe de celles dont nous parlons. Pour en avoir les racines, je substitue dans la formule ci-dessus 3 pour m, 4 pour $+p$ et -96 pour $-q$, ce qui donne (en prenant dans la valeur de x le signe supérieur pour p et l'inférieur pour q, ainsi que la supposition l'exige, $x = \sqrt[3]{[-2 \pm \sqrt{4+96}]} = \sqrt[3]{[-2 \pm \sqrt{100}]} = \sqrt[3]{-2 \pm 10} = \sqrt[3]{+8}$, ou $\sqrt[3]{-12}$; or, en cherchant les trois racines différentes que doivent avoir chacune de celles-ci; on trouverait les six racines de l'équation proposée, parmi lesquelles il y en a deux réelles et quatre imaginaires, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre par le scolie suivant.

369. SCOLIE I. En parlant plus haut des équations pures, nous n'avons pu assigner la forme de leurs racines que dans le second et le quatrième degrés, et dans d'autres degrés pairs qui peuvent s'y rapporter. Il nous reste à faire cette recherche dans les degrés impairs. Pour cela soit l'équation $x^3 + c^3 = 0$, qui donne, en transposant, $x^3 = -c^3$; et extrayant la racine cubique de chaque membre, $x = -c$; de façon qu'une racine de la proposée est $-c$. Pour découvrir les autres racines (car je ne puis pas douter (349) qu'elle n'en ait trois); je divise la proposée par $x + c$, qui doit être un de ses facteurs. Voici le détail de ce calcul, par lequel on trouve pour quotient $x^2 - cx + c^2 = 0$.

Dividende..... $x^3 + c^3$ | $x + c$ ..... Diviseur.

$x^3 - cx^2$ | $x^2 - cx + c^2$ .. Quotient.

$-cx^2 + c^3$

$+cx^2 + c^2x$

$c^2x + c^3$

$-c^2x - c^3$

0 0

Considérant donc ce quotient comme une équation du second degré, je cherche la valeur de x, ou bien en la laissant d'un côté et complétant le quarré, ou bien en employant la formule ci-dessus (367), et j'ai $x = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - c^2}$, et en réduisant $\frac{1}{4}c^2$ et $-c^2$ à $-\frac{3}{4}c^2$, $x = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{-\frac{3}{4}c^2}$: simplifiant le radical (185), $x = \frac{1}{2}c \pm \frac{1}{2}c\sqrt{-3} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)c$. De sorte que les trois racines de l'équation proposée sont $-c$, $\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)c$, $\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)c$. Pour m'en assurer de nouveau, je les substitue successivement à x, et je trouve que chacune élevée au cube donne $-c^3$, et qu'ainsi elle remplit la condition qu'indique la proposée, savoir, que $x^3 + c^3 = 0$. Et de là j'en déduis encore la confirmation de ce que nous avons dit ailleurs (146) qu'un cube a trois différentes racines cubiques, puisqu'on voit ici que $-c^3$ a pour racines $-c$, $\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)c$, $\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)c$.

370. Scolie II. Avant de quitter les équations du second degré, il est bon d'observer quelles sont les marques auxquelles on reconnaîtra, sans résoudre l'équation, si ses racines sont réelles ou imaginaires, commensurables ou incommensurables. Pour cela, soit l'équation

$x^2 \pm px \pm q = 0$, qui peut représenter une équation quelconque de ce degré, en supposant les quantités connues représentées par $\pm p$, $\pm q$, et l'on trouve aisément (367) pour ces deux racines $x = \mp \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 \mp q}$. Or, cette valeur de x ne peut être imaginaire, qu'autant que q y est négatif et plus grand que $\frac{1}{4}p^2$. Donc en supposant tous les termes de la proposée d'un côté, et o de l'autre, les racines imaginaires ne peuvent avoir lieu qu'à ces conditions : 1.° *Que son dernier terme soit positif : 2.° Qu'il soit plus grand que le quarré de la moitié du coèfficient du second.* Ainsi dans $x^2 - 6x + 12 = 0$, je vois que les deux racines sont imaginaires : 1.° parce que le dernier terme 12 est positif : 2.° parce qu'il est plus grand que 9, qui est le quarré de la moitié du second coèfficient ; en effet les racines sont $3 + \sqrt{-3}$, $3 - \sqrt{-3}$.

Lorsque l'une ou l'autre de ces deux conditions manque, les racines sont toujours réelles ; et si de plus *le dernier terme de la proposée soustrait du quarré de la moitié du second coèfficient, (ou bien $\frac{1}{4}p^2 \mp q$) forme un quarré parfait, ces deux racines sont commensurables ; et dans le cas contraire, elles ne le sont pas.* Ainsi dans $x^2 - 6x - 16 = 0$, je vois d'abord que les deux racines sont réelles, parce que la première condition leur manque pour être imaginaires ; ensuite je vois qu'elles sont commensurables, puisque -16 soustrait de $+9$, donne le quarré 25. Aussi trouve-t-on pour racines $+8$, -2. Dans $x^2 - 6x - 12 = 0$, on trouve deux racines réelles, mais incommensurables ; parce que -12 soustrait de $+9$, ou bien 21, n'est point un quarré parfait ; aussi l'une est $3 + \sqrt{21}$, et l'autre $3 - \sqrt{21}$.

371. PROBLÈME I. *On demande un nombre qui soit tel, qu'étant ajouté dix fois à son quarré, il donne 75.*

SOLUTION. Appelons ce nombre x, et la condition sera exprimée par $x^2 + 10x = 75$; et si, sans recourir à la méthode générale (366), on veut seulement employer la formule

formule ci-dessus (367), on transposera 75 de cette manière, $x^2 + 10x - 75 = 0$, et l'on substituera $+10$ à $+p$ et -75 à $-q$, ce qui donnera $x = -5 \pm \sqrt{25 + 75} = -5 \pm 10$; de sorte que $x = +5$, ou -15; et, en effet, chacun de ces deux nombres remplit les conditions du problème.

372. Problème II. *Deux capitaines avaient chacun* 48 *écus d'or à partager à ceux de leurs soldats qui s'étaient distingués dans une action; on sait seulement que l'un en trouva deux de plus que l'autre dans sa compagnie; et qu'après le partage, chacun des siens eut quatre écus de moins, que ceux de l'autre capitaine. On demande à combien de soldats cet argent fut distribué, et quelle fut la portion de chacun.*

Solution. Il est clair que si l'on connaît le nombre des soldats, on aura par la division la part de chacun. Or, appelant ce nombre x d'un côté, il sera $x - 2$ de l'autre; et puisque la part de ces derniers a été de quatre écus plus forte que celle des autres, on a $\frac{48}{x} + 4 = \frac{48}{x-2}$. Otant les fractions et plaçant tous les termes d'un côté, on a $4x^2 - 8x - 96 = 0$; et divisant par 4, $x^2 - 2x - 24 = 0$: substituant dans la formule -2 pour $-p$, -24 pour $-q$, on a $x = 1 \pm \sqrt{1 + 24} = 6$. Donc un capitaine distribua cet argent à six soldats, et l'autre à quatre : chacun des premiers eut 8 écus, et chacun des deux autres 12.

373. Problème III. *On demande de partager le nombre* 20 *en deux parties, dont le produit de l'une par l'autre, soit plus grand que* 100.

Solution. Soit x une de ces parties, l'autre sera $20 - x$: par la supposition, le produit de $x \times 20 - x$ doit être plus grand que 100; supposons le 101, et l'on aura $x \times 20 - x = 101$. Ou bien, en mettant tous les termes d'un côté, $x^2 - 20x + 101 = 0$, équation qui annonce (370) que ses racines sont imaginaires; et, en

effet, en substituant pour p et pour q, on a, $x = 10 \pm \sqrt{100 - 101} = 10 \pm \sqrt{-1}$; d'où l'on conclut que le problème en question est impossible avec les conditions qui l'accompagnent; et de là on peut déduire encore cette vérité : *que le plus grand de tous les produits que peuvent donner les deux parties d'un nombre réel, multipliées l'une par l'autre, est celui des deux moitiés.*

374. Remarque. Lorsque les conditions d'un problème ne peuvent être remplies que par des nombres d'une certaine espèce, et que sa solution fait trouver seulement des nombres d'une espèce différente, alors on peut dire que la question est contradictoire dans son énoncé, ou bien qu'elle est impossible, avec les seules données qui l'accompagnent. Par exemple, si l'on demande un nombre x entier ou fractionnaire, dont le double ajouté à son quarré donne 4; la question sera exprimée par $x^2 + 2x = 4$, et l'on trouvera $x = -1 \pm \sqrt{5}$; ce qui fera conclure que la question est impossible avec cette donnée ou condition, que le nombre cherché soit entier ou fractionnaire; mais que cette impossibilité disparaîtrait, si je changeais ou si j'étendais les conditions, en demandant, en général, un nombre quelconque, rationnel ou irrationnel, dont le double ajouté à son quarré, donnât 4; car alors les mêmes racines $-1 \pm \sqrt{5}$, qui prouvaient l'absurdité de la première question, donneraient la solution de la seconde : de pareilles réflexions peuvent se faire sur la solution du problème III. En général, de ce qu'on trouvera dans une équation des racines qui sont impossibles dans certains cas, on se gardera d'en conclure qu'elles le seraient dans tous les autres; car il peut y avoir telle question, qui ne saurait être résolue que par celles-là; et cette singularité vient de ce qu'on est quelquefois forcé à exprimer par la même équation des problèmes très-différents par leurs limitations particulières; et alors il peut arriver que ces limitations rendent impossibles dans un cas les mêmes racines qui sont les seules possibles dans un autre; dans

lequel, ou bien ces limitations seraient différentes, ou bien encore elles n'existeraient pas.

CHAPITRE VI.

Des équations du troisième degré.

375. La méthode qui paraît la plus simple, pour résoudre ces sortes d'équations, c'est d'en former d'abord une de ce degré, qui ait une racine connue; de se servir de cette racine, pour découvrir les deux autres; et ensuite de ramener toutes les équations de ce degré à la forme de celle que nous aurons résolue ainsi, afin de pouvoir y appliquer la même méthode.

Soit donc $x = c + d$, dans laquelle c et d sont des quantités connues : supposons qu'on élève les deux membres de cette équation au cube (on doit savoir (152) former le cube d'un binome, sans passer par la multiplication, et cette formation revient *à prendre le cube de chaque terme, et leur triple produit multiplié par leur somme*). On a donc ici $x^3 = c^3 + d^3 + 3cd(c + d)$. Ou bien, mettant x au lieu de son égale $c + d$, et transposant $x^3 - 3cdx - c^3 - d^3 = 0$, équation dans laquelle on est assuré qu'une racine est $c + d$, ou bien que $x - c - d$ est un des facteurs.

Pour découvrir les deux autres, le moyen le plus simple est de diviser l'équation par $x - c - d$, ce qui la réduira au second degré, et de chercher dans l'équation ainsi réduite, les deux racines inconnues, par la méthode de ce degré, laquelle n'admet aucune exception. Voici le détail de ce calcul.

Dividende... $x^3 - 3cdx - c^3 - d^3$ | $x - c - d$ ..... Diviseur.

$-x^3 + cx^2 + dx^2$ | $x^2 + (c+d)x + c^2$ / $-cd$ / $+d^2$ } Quotient.

1.er reste.. $(c+d)x^2 - 3cdx - c^3 - d^3$

$(-c-d)x^2 + (c^2 + 2cd + d^2)x$

2.e reste..... $(c^2 - cd + d^2)x - c^3 - d^3$

$(-c^2 + cd - d^2)x + c^3 - c^2d + cd^2$

$+ c^2d - cd^2 + d^3$

3.e reste.....0

Il ne s'agit donc à présent que de considérer ce quotient, comme une équation du second degré, laquelle sera $x^2 + (c+d)x + c^2 - cd + d^2 = 0$, et d'en prendre les racines d'après la formule donnée ci-dessus (367), ce qui fera trouver $x = \frac{-c-d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-c-d}{2}\right)^2 - c^2 + cd - d^2}$. Pour simplifier cette expression, on élevera au quarré la fraction $\frac{-c-d}{2}$, qui est sous le radical, et alors toutes les quantités qui sont sous le signe, se réduiront à $-\frac{3}{4}c^2 + \frac{3}{2}cd - \frac{3}{4}d^2$, ou bien à $-3(\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}cd + \frac{1}{4}d^2)$. Ainsi ce radical deviendra $\pm\sqrt{-3(\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}cd + \frac{1}{4}d^2)}$; et comme, sous cette forme, il contient le quarré de $\frac{c-d}{2}$ multiplié par -3, en faisant passer hors du signe (185), il devient $\pm\frac{(c-d)}{2}\sqrt{-3}$; et par conséquent les deux racines que nous cherchons sont .....

$$x = \frac{-c-d}{2} \pm \left(\frac{c-d}{2}\right)\sqrt{-3}.$$

376. De là nous pouvons conclure que, dans toute équation du troisième degré, qui sera disposée de telle ma-

nière; 1.° *qu'elle n'ait pas de second terme*; 2.° *que le terme connu soit la somme de deux cubes* (c^3, d^3); 3.° *que le coèfficient de* x *soit le triple produit de leurs racines cubiques* (3 cd), *on aura ses trois racines exprimées par* . . . . .

$$x = c + d$$

$$x = \frac{-c-d}{2} + \left(\frac{c-d}{2}\right)\sqrt{-3}.$$

$$x = \frac{-c-d}{2} - \left(\frac{c-d}{2}\right)\sqrt{-3}.$$

EXEMPLES.

377. Soit cette équation $x^3 = 6x + 9$, qui renferme toutes les conditions que nous demandons; puisqu'elle n'a pas de second terme, que de plus le terme connu 9 est la somme de deux cubes 8 + 1; et que le coèfficient de x, savoir, 6, est le triple produit de leurs racines cubiques, 2 et 1. Faisant ici $c = \sqrt[3]{8}$, $d = \sqrt[3]{1}$; j'aurai d'après les formules ci-dessus,

$$x = 3$$

$$x = \frac{-3+\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{-3-\sqrt{-3}}{2}$$

Soit celle-ci $x^3 = -6x - 7$, dans laquelle $-7 = 1 - 8$, qui sont les cubes de + 1 et de − 2; et − 6 est aussi le triple produit de leurs racines cubiques. Ainsi nous devons trouver ces trois racines d'après les formules, en faisant $c = -2$, $d = 1$, et elles seront,

$$x = -1$$

$$x = \frac{1-3\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{1+3\sqrt{-3}}{2}$$

Si l'on examine encore cette autre équation $x^3 = 36x + 91$, on la trouvera dans les mêmes conditions que les

précédentes, et les mêmes formules feront trouver pour ses racines,

$$x = 7$$

$$x = \frac{-7+\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{-7-\sqrt{-3}}{2}$$

Dans tous ces différents cas, on peut se convaincre que l'équation résolue a les propriétés qui doivent nécessairement lui convenir, d'après l'article 347.

Les exemples que nous venons de rapporter, n'ont présenté aucune difficulté; mais on doit s'attendre qu'il n'en serait pas ainsi d'un grand nombre d'autres équations; parce qu'il ne peut point être toujours aussi aisé de les ramener aux conditions, que la solution précédente exige. Nous pouvons, à la vérité, par ce que nous avons vu ailleurs (352), remplir la première dans tous les cas, et le problème suivant va nous apprendre à satisfaire aux deux autres.

378. PROBLÈME. *Deux nombres* p *et* q *étant donnés, on en demande deux autres, tels que leur somme soit égale à* q, *et que le triple produit de leurs racines cubiques soit égal à* p.

SOLUTION. Désignant ces nombres inconnus l'un par y, l'autre par z; la première condition est que $y+z=q$; la seconde que $3\sqrt[3]{yz}=p$. Donc, en divisant cette dernière équation par 3, et l'élevant au cube, on a $yz=\frac{1}{27}p^3$; qui étant multipliée par 4 devient, $4yz=\frac{4}{27}p^3$.

Si donc on élève l'équation $y+z=q$ au quarré, lequel sera $y^2+2yz+z^2=q^2$, et que de là on soustraye celle que nous venons de trouver, on aura $y^2-2yz+z^2=q^2-\frac{4}{27}p^3$; et en extrayant les racines, $y-z=\pm\sqrt{q^2-\frac{4}{27}p^3}$. Ajoutant cette dernière équation à la primitive $y+z=q$, et dégageant y, on a pour sa valeur, $y=\frac{1}{2}q\pm\frac{1}{2}\sqrt{q^2-\frac{4}{27}p^3}$;

ou bien, en faisant entrer la fraction $\frac{1}{2}$ sous le signe radical (181),

$$y = \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}.$$

Pour avoir la valeur de z, il n'y a qu'à substituer celle de y dans la primitive $y + z = q$, laquelle donne $z = q - y$, et l'on a,

$$z = \tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}.$$

Il n'est pas douteux que ces valeurs de y et de z ne remplissent les conditions du problème. Car si on prend leur somme, les quantités radicales s'évanouiront, par rapport à l'opposition des signes ; et il ne restera dans chaque valeur que $\frac{1}{2}q$; donc on aura $y + z = q$, ce qui est la première condition. Quant à la seconde, elle est également remplie ; car en observant que les valeurs trouvées de y et de z présentent, l'une la somme, l'autre la différence de deux quantités, savoir de $\frac{1}{2}q$ et de $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$, pour avoir le produit yz de l'une de ces valeurs multipliée par l'autre, il suffit (155) de prendre la différence de leurs quarrés, laquelle sera $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, ou bien $\frac{1}{27}p^3$. Donc $yz = \frac{1}{27}p^3$ et $\sqrt[3]{yz} = \frac{1}{3}p$; partant $3\sqrt[3]{yz} = p$, ou bien le triple produit de ces racines vaudra p, coëfficient de x, ainsi que l'exige la seconde condition.

379. Corollaire. On conclura de là *que toute équation du troisième degré peut être ramenée à la forme de celles dont nous avons parlé plus haut* (369) ; *et qu'ainsi les mêmes formules en pourront indiquer les trois racines.* Car quelle que soit cette équation, on peut faire évanouir son second terme, et alors on peut la représenter par $x^3 = px + q$, dans laquelle p et q indiqueront des nombres connus quelconques. Or (378), sans rien changer à la valeur de ces nombres, à la place de q, on peut substituer la somme des valeurs de y et de z, prises du problème précédent, et considérées comme deux cubes ; et à la place de p, le triple produit des racines cubiques de ces mêmes va-

leurs ; ce qui donnera à l'équation $x^3 = px + q$ la forme de celles que nous avons déja résolues (376). Supposant donc ces nombres substitués à la place de p et de q, l'équation générale $x^3 = px + q$, deviendra telle qu'on la voit sous la lettre A ci-dessous ; et la première valeur de x sera exprimée par l'équation B :

$$\text{A...}x^3 = 3\times\sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}\right]}\times\sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}\right]} \times x + \tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3} + + \tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}$$

$$\text{B...}x = \sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}\right]} + + \sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}\right]}$$

Ou bien en supposant, comme ci-dessus, que le premier radical cube, savoir, $\sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}\right]}$ est ici représenté par c ; et que le second, $\sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}\right]}$, l'est par d ; on a pour une équation quelconque du troisième degré, les mêmes expressions des racines que nous avons déjà eues ; savoir :

$$\text{I.}\ldots\ldots x = c + d$$

$$\text{II}\ldots\ldots x = \frac{-c-d}{2} + \frac{\overline{c-d}}{2}\times\sqrt{-3}$$

$$\text{III}\ldots\ldots x = \frac{-c-d}{2} - \frac{\overline{c-d}}{2}\times\sqrt{-3}\ (*).$$

380. Il ne s'agit donc à présent que de chercher quelles

(*) Si l'on conserve dans la mémoire la composition des deux radicaux représentés par c et d, on peut énoncer distinctement la valeur des trois racines du troisième degré, en disant *que la première vaut la somme des deux radicaux cubiques* c *et* d ; *que la seconde vaut la moitié de la somme des mêmes radicaux, prise avec un signe contraire, plus la moitié de leur différence multipliée par* $\sqrt{-3}$; *que la troisième vaut encore la moitié de cette somme, toujours prise avec un signe contraire, moins la moitié de la même différence multipliée par* $\sqrt{-3}$.

sont les différentes formes que peuvent prendre ces racines. Pour les découvrir, il faut surtout faire attention aux changements que les diverses valeurs des données p et q produiront dans $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$, qui entre toujours dans les valeurs de c et de d. Or, il ne peut arriver à ce radical d'autres changements que d'être ou zéro, ou une quantité réelle, ou une imaginaire.

381. Il sera zéro, lorsque $\frac{1}{27}p^3$ sera négatif et égal à $\frac{1}{4}q^2$, qui doit toujours être positif (113). Et une équation étant proposée, on voit, par les valeurs de p et de q, si $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2$; tandis que le signe qui précède p, détermine si $\frac{1}{27}p^3$ sera positif ou négatif dans $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$; car si l'équation proposée est de cette forme, $x^3 = -px \pm q$, $\frac{1}{27}p^3$ sera toujours positif dans le radical ci-dessus; et si elle est de celle-ci, $x^3 = px \pm q$, il y sera négatif. Or, quand on aura, comme on le suppose ici, $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3} = 0$, les deux radicaux cubiques de l'équation B, se réduiront chacun à $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$, ou bien, dans nos formules, il viendra $c = d = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$; ce qui suffit pour en faire évanouir la partie imaginaire. Ainsi les trois racines seront alors réelles, deux d'entre elles étant chacune la moitié de la troisième, et d'un signe contraire; ou bien on aura :

$$x = c + d$$

$$x = \frac{(-c-d)}{2}$$

$$x = \frac{(-c-d)}{2}$$

382. Si le radical quarré $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$ est une quantité réelle, la première des racines (379) sera réelle; puisque les radicaux cubiques de l'équation B, représentés par c et par d, n'auront rien d'imaginaire; mais alors les deux autres racines seront imaginaires, puisque chacune contiendra le facteur imaginaire $\sqrt{-3}$, lequel n'étant multiplié ni par des quantités égales et opposées, ni par

d'autres imaginaires, il restera nécessairement des termes imaginaires dans le produit. Or, si l'on demande quand est-ce que $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$ est une quantité réelle, il est aisé de voir que ce sera toutes les fois que p entrera sous le radical avec le signe $+$, ce qui arrivera dans toutes les équations de cette forme $x^3 = -px \pm q$; ou même lorsque p y entrant avec le signe $-$ (ce qui ne peut arriver que dans les équations de cette forme-ci, $x^3 = px \pm q$) on aura $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}q^2$.

383. Examinons à présent le cas où $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$ sera imaginaire, et observons d'abord que ce cas ne peut avoir lieu qu'autant que $\frac{1}{27}p^3$ se trouvera négatif sous le radical, et plus grand que $\frac{1}{4}q^2$. La première condition exige donc que la proposée soit de cette forme $x^3 = px \pm q$; et la seconde que l'on ait $\frac{1}{3}p > \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2}$, ou bien $p > 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2}$. Dans ce cas, qui, comme on le voit par la latitude de ses conditions, peut s'étendre à l'infini, chacun des radicaux cubiques de l'équation B est imaginaire, pris séparément (203): cependant ici, comme dans d'autres cas (200), leur somme devient réelle dans la première racine (379), ainsi que leur différence multipliée par $\sqrt{-3}$ dans les deux autres. Personne, à la vérité, n'a pu jusqu'ici en trouver l'expression générale, et c'est cette difficulté qui a fait donner à ce cas le nom *de cas irréductible du troisième degré.*

384. Pour prouver qu'ici les trois racines de l'équation sont réelles, changeons d'abord $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$ en $\sqrt{[\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2]}\,[\sqrt{-1}]$ qui lui est égale, et supposons que $\sqrt{[\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2]}$, qui alors est une quantité réelle, soit représentée par k, et qu'ainsi on substitue $k\sqrt{-1}$ à la place de $\sqrt{[\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3]}$.

Supposons encore, pour faciliter le calcul, que $\frac{1}{2}q$ soit désigné par r, alors (379) $c = \sqrt[3]{[r + k\sqrt{-1}]}$ et $d = \sqrt[3]{[r - k\sqrt{-1}]}$. Donc, en changeant ces radicaux en

puissances fractionnaires, à la place des trois racines assignées ci-dessus (379), on aura :

$$\text{I}\ldots. x = \overline{r + k\sqrt{-1}}^{\frac{1}{3}} + \overline{r - k\sqrt{-1}}^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{II et III}\ldots x = \tfrac{1}{2}\left[-\overline{r - k\sqrt{-1}}^{\frac{1}{3}} - \overline{r + k\sqrt{-1}}^{\frac{1}{3}}\right] \pm$$

$$\pm \tfrac{1}{2}\left[\overline{r + k\sqrt{-1}}^{\frac{1}{3}} - \overline{r + k\sqrt{-1}}^{\frac{1}{3}}\right].\sqrt{-3}.$$

Et si l'on développe la première racine d'après la formule du binome (137), on trouvera :

$$(r+k\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3} r^{-\frac{2}{3}} k\sqrt{-1} + \tfrac{1}{9} r^{-\frac{5}{3}} k^2 + \tfrac{5}{81} r^{-\frac{8}{3}} k^3\sqrt{-1}$$

$$- \tfrac{10}{243} r^{-\frac{11}{3}} k^4 - \tfrac{22}{729} r^{-\frac{14}{3}} k^5\sqrt{-1} + \tfrac{308}{13122} r^{-\frac{17}{3}} k^6 \ldots. \text{ etc.}$$

$$(r-k\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{3} r^{-\frac{2}{3}} k\sqrt{-1} + \tfrac{1}{9} r^{-\frac{5}{3}} k^2 - \tfrac{5}{81} r^{-\frac{8}{3}} k^3\sqrt{-1}$$

$$- \tfrac{10}{243} r^{-\frac{11}{3}} k^4 + \tfrac{22}{729} r^{-\frac{14}{3}} k^5\sqrt{-1} + \tfrac{308}{13122} r^{-\frac{17}{3}} k^6 \ldots\ldots \text{ etc.}$$

Prenant la somme de ces deux séries, tous les termes imaginaires se détruisent, et l'on a pour la première valeur de x, ou pour $c+d$:

$$x = 2r^{\frac{1}{3}} + \tfrac{2}{9} r^{-\frac{5}{3}} k^2 - \frac{2.10}{243} r^{-\frac{11}{3}} k^4 + \frac{2.308}{13122} r^{-\frac{17}{3}} k^6 \ldots \text{ etc.}$$

Or, 1.°. . . . $r^{-\frac{5}{3}} = \dfrac{1}{r^{\frac{5}{3}}} = \dfrac{r^{\frac{1}{3}}}{r^{\frac{6}{3}}} = r^{\frac{1}{3}} \times \dfrac{1}{r^2}$.

2.° . . . $r^{-\frac{11}{3}} = \dfrac{1}{r^{\frac{11}{3}}} = \dfrac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{12}{3}}} = r^{\frac{2}{3}} \times \dfrac{1}{r^4}$.

3.° . . . $r^{-\frac{17}{3}} = \dfrac{1}{r^{\frac{17}{3}}} = \dfrac{r^{\frac{1}{3}}}{r^{\frac{18}{3}}} = r^{\frac{2}{3}} \times \dfrac{1}{r^6}$.

Substituant donc pour $r^{-\frac{5}{3}}$, pour $r^{-\frac{11}{3}}$, pour $r^{-\frac{17}{3}}$, la première valeur de x deviendra :

$$x = 2r^{\frac{1}{3}} + \tfrac{2}{9} r^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{k^2}{r^2} - \frac{2.10}{243} r^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{k^4}{r^4} + \frac{2.154}{6561} r^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{k^6}{r^6} \ldots \text{ etc.}$$

Dans laquelle $2 . r^{\frac{1}{3}}$, ou bien $2 . \sqrt[3]{r}$ entrant dans tous les termes, on aura enfin sous une forme plus simple :

$$x = 2 . \sqrt[3]{r} . \left(1 + \tfrac{1}{3} \frac{k^2}{r^2} - \frac{10}{243} . \frac{k^4}{r^4} + \frac{154}{6561} . \frac{k^6}{r^6} \ldots \text{etc.} \right)$$

385. Pour prouver que dans ce même cas, les deux autres racines ou valeurs de x sont également réelles, il faut observer :

1.° Qu'en multipliant $\sqrt{-3}$ par $\sqrt{-1}$, on a la quantité réelle $-\sqrt{3}$, puisque $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1}$; et qu'ainsi $\sqrt{-3} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3} \times -1 = -\sqrt{3}$.

2.° Que ces racines renfermant l'une et l'autre, la moitié de la première, prise avec un signe contraire, cette partie de leur expression vient d'être trouvée, et sera :

$$-\sqrt[3]{r} \left(1 + \tfrac{1}{3} . \frac{k^2}{r^2} - \frac{10}{243} . \frac{k^4}{r^4} + \frac{154}{6561} . \frac{k^6}{r^6} . \ldots . \text{etc.} \right)$$

3.° Que si l'on soustrait d de c, ou bien la série représentant $(r - k\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ de celle représentant $(r + k\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, il vient pour différence :

$$2 . \tfrac{1}{3} r^{-\frac{2}{3}} k \sqrt{-1} + 2 . \tfrac{5}{81} r^{-\frac{5}{3}} k^3 \sqrt{-1} -$$

$$- 2 . \tfrac{22}{729} r^{-\frac{11}{3}} k^5 \sqrt{-1} \ldots \text{etc.}$$

4.° Que si l'on prend la moitié de cette différence, et que, en outre, on la multiplie par $\sqrt{-3}$, ainsi que l'indique l'expression $\left(\frac{c - d}{2} \right) \times \sqrt{-3}$ qui entre dans la seconde et troisième racine, il vient la quantité :

$$-\tfrac{1}{3} r^{-\frac{2}{3}} k . \sqrt{3} - \tfrac{5}{81} r^{-\frac{5}{3}} k^3 \sqrt{3} +$$

$$+ \tfrac{22}{729} r^{-\frac{11}{3}} k^5 \sqrt{3} \ldots \text{etc.}$$

dans laquelle il n'y a aucun terme imaginaire. D'où l'on conclura que, soit qu'on ajoute cette différence ainsi

multipliée par $\sqrt{-3}$, à la moitié de la première racine, soit qu'on l'en soustraye, il ne reste aucun terme imaginaire dans ces expressions.

5.° Enfin, pour les simplifier encore, on observera

que $r^{-\frac{3}{3}} = \frac{1}{r^{\frac{3}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{r^3}}$.

que $r^{-\frac{6}{3}} = \frac{1}{r^{\frac{6}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{r^6}} = \frac{1}{\sqrt[3]{r^3}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{r^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{r^6}} \times \frac{1}{r^3}$;

que $r^{-\frac{14}{3}} = \frac{1}{r^{\frac{14}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{r^{14}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{r^3}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{r^{12}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{r^6}} \times \frac{1}{r^4}$;

et si on substitue, dans la valeur qu'on vient de trouver, pour $\frac{c-d}{2} \times \sqrt{-3}$, on aura :

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{r^3}} \cdot k\sqrt{3} - \frac{2}{3 \cdot 6} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{r^3}} \cdot k^3\sqrt{3} +$$

$$+ \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} \cdot \frac{1}{r^6} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{r^3}} \cdot k^5\sqrt{3} \ldots \text{etc.}$$

ou bien $\frac{k\sqrt{3}}{\sqrt[3]{r^3}}\left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{3 \cdot 6} \cdot \frac{k^2}{r^3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} \cdot \frac{k^4}{r^6} \cdot \ldots\ldots \text{etc.}\right)$

Donc l'expression générale et simplifiée de la seconde et troisième racine dans le cas irréductible, (prenant le signe + pour la seconde, et le signe — pour la troisième) sera :

$$\text{II et III...} \; x = -\sqrt[3]{r}\left(1 + \frac{1}{9}\frac{k^2}{r^2} - \frac{10}{2 \cdot 4 \cdot 8} \cdot \frac{k^4}{r^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 4}{6 \cdot 8 \cdot 12} \cdot \frac{k^6}{r^6} \cdot \text{etc.}\right)$$

$$\pm \frac{k\sqrt{3}}{\sqrt[3]{r^3}}\left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{6 \cdot 9} \cdot \frac{k^2}{r^3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} \cdot \frac{k^4}{r^6} \ldots \text{etc.}\right)$$

386. Scolie. Il faut observer que les séries trouvées ne présentent des valeurs approchées de x, qu'autant qu'elles sont convergentes; ce qui arrivera seulement

dans les équations donnant $k < r$, ou $k = r$, parce que alors chaque numérateur sera plus petit que son dénominateur ; et pour les rendre telles, lorsque $k > r$, il suffit de prendre, dans les binomes élevés ci-dessus (384) à la puissance $\frac{1}{3}$, le terme $+k\sqrt{-1}$, ou $-k\sqrt{-1}$ pour le premier, et alors, en faisant des calculs semblables à ceux que nous avons détaillés, et observant que $(\pm k\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = \pm k^{\frac{1}{3}}(-1)^{\frac{1}{3}} \times (-1)^{\frac{1}{2}} = \mp k^{\frac{1}{3}}.\sqrt{-1}$, on trouvera pour les trois valeurs de x :

$$\text{I.... } x = \frac{2r}{\sqrt[3]{k^2}}\left[-\frac{1}{3} + \frac{5}{6.1}\frac{r^2}{k^2} - \frac{2.2}{7.2.9}\frac{r^4}{k^4} + \text{. . . etc.}\right]$$

$$\text{II et III.. } x = -\frac{r}{\sqrt[3]{k^2}}\left[-\frac{1}{3} + \frac{1.5}{6.1}\frac{r^2}{k^2} - \frac{2.2}{7.2.9}\frac{r^4}{k^4} + \text{. . . etc.}\right]$$

$$\pm\sqrt[3]{k}.\sqrt{3}\left[1 + \frac{1}{9}\frac{r^2}{k^2} - \frac{1.0}{2.4.3}.\frac{r^4}{k^4} + \frac{1.5.4}{6.5.6.1}\frac{r^6}{k^6} \text{.. etc.}\right]$$

387. PROBLÈME I. *Trouver un nombre tel qu'ajoutant son cube au produit de ce méme nombre multiplié par* 45, *la somme soit* 100. . . . . .

SOLUTION. Désignons par x le nombre cherché, et l'on aura l'équation $x^3 + 45x = 100$, ou bien $x^3 = -45x + 100$, qui étant comparée à la formule $x^3 = -px \pm q$ du n.° 375 fait voir qu'une de ses racines est réelle, et que les deux autres sont imaginaires. Faisant donc $-45 = -p$ et $100 = q$, on a (379)

$$x = \sqrt[3]{[50 + 5\sqrt{235}]} + \sqrt[3]{[50 - 5\sqrt{235}]}.$$

388. PROBLÈME II. *Trouver par les méthodes précédentes les racines de l'équation complète* $t^3 + 12t^2 + 60t + 103 = 0$.

SOLUTION. Pour y appliquer les formules ci-dessus, je dois d'abord faire disparaître son second terme, ce qui s'exécutera (352) en supposant $t = x - \frac{12}{3}$ ou $t = x - 4$; d'où l'on déduira $x^3 + 12x - 9 = 0$, ou $x^3 = -12x + 9$;

laquelle étant rapportée à l'équation $x^3 = -px \pm q$ du n.° 382, donne $-12 = -p$, $9 = q$, et fait voir que la première racine est réelle, et que les deux autres sont imaginaires. Or, (379) cette racine réelle sera . . . . . .

$$x = \sqrt[3]{\left[\frac{9+\sqrt{337}}{2}\right]} + \sqrt[3]{\left[\frac{9-\sqrt{337}}{2}\right]},$$

et retranchant 4 de cette valeur de x pour satisfaire à l'équation $t = x - 4$, on aura la valeur de t.

389. Problème III. *On demande de résoudre cette équation* $t^3 + 6t^2 - 18t + 10 = 0$.

Solution. 1.° Je commence par faire disparaître le second terme, en supposant (352) $t = x - 2$; et j'ai pour l'équation transformée $x^3 - 30x + 62 = 0$, ou bien $x^3 = 30x - 62$, qui se rapporte à la formule $x^3 = px \pm q$ de l'article 376.

2.° Puisqu'ici $p = 30$ et $-q = -62$, il vient $\frac{1}{3}p = 10$, $-\frac{1}{4}q = -31$, $\frac{1}{4}qq = 961$, et partant $10 > \sqrt[3]{961}$. Donc, on a $\frac{1}{3}p > \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq}$, et l'équation réunit les deux conditions requises (383), pour avoir ses trois racines réelles; mais étant dans le cas irréductible, on ne peut leur assigner que des valeurs approchées.

Pour les obtenir, observons (384) qu'ici, à la place de r pris dans la formule, il faut écrire -31; et puisque $k = \sqrt{(1000 - 961)}$, ou bien $k^2 = 39$, on a $k < r$. Et les séries des articles 377 et 378 devenant convergentes dans le cas présent, c'est par elles qu'il faut chercher ces valeurs. Or (377), il est venu :

$$x = 2 \cdot \sqrt[3]{r}\left[1 + \tfrac{1}{9}\frac{k^2}{r^2} - \tfrac{10}{243}\cdot\frac{k^4}{r^4} + \tfrac{154}{6561}\cdot\frac{k^6}{r^6} \ldots\right]$$

Donc substituant, ainsi qu'on vient de le dire, on trouvera pour la valeur approximative de la première racine, $x = -6{,}311$.

Quant aux valeurs des deux autres, on a deux moyens de les obtenir, ou bien de substituer pour r et pour k dans la double série qui termine l'article 378; ou bien, ce qui est plus court, de diviser l'équation proposée $x^3 - 30x + 62 = 0$, par son facteur $x + 6{,}311$, et il viendra pour quotient une équation du second degré qui donnera les deux autres racines dont les valeurs approchées, les seules qu'on peut avoir ici, sont $x = 2{,}7971\ldots$ $x = 3{,}5139$. Et enfin puisqu'on a supposé $t = x - 2$, il viendra pour les trois racines de l'équation primitive,

$$t = -8{,}311.$$
$$t = 0{,}7971.$$
$$t = 1{,}5139.$$

CHAPITRE VII.

De la résolution des équations du quatrième degré.

La méthode que nous nous proposons d'expliquer ici, a été découverte par Euler; et nous allons la présenter telle qu'il l'a donnée dans le premier tome de ses Eléments d'algèbre. Elle consiste, une équation du quatrième degré étant donnée, à en trouver une du troisième, dont les racines servent à découvrir celles de la première. Mais auparavant il faut voir comment est-ce qu'avec les racines d'une équation du troisième degré, on peut parvenir à une autre qui sera du quatrième.

390. Soit donc l'équation du troisième degré $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$, que j'appellerai *l'équation auxiliaire*, et dont les trois racines soient les quantités connues p, q, r: supposons que l'on ait $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, et qu'on élève les deux membres de cette équation au quarré, ce qui donnera $x^2 = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$.

Or,

Or (353), $p+q+r=f$; donc en transposant on a $x^2-f=2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$.

Elevons encore cette dernière équation au quarré et nous aurons, $x^4-2fx^2+f^2=4pq+4pr+4qr+8\sqrt{p^2qr}+8\sqrt{pq^2r}+8\sqrt{pqr^2}$. Or (353), $4pq+4pr+4qr=4g$: et de plus $8\sqrt{p^2qr}+8\sqrt{pq^2r}+8\sqrt{pqr^2}=8\sqrt{pqr}(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$ Donc $x^4-2fx^2+f^2-4g=8\sqrt{pqr}(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$. D'ailleurs (353) $pqr=h$, et partant $8\sqrt{pqr}=8\sqrt{h}$: par la supposition $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=x$. Donc substituant ces valeurs, et transposant, on a l'équation du quatrième degré,

$$(A)\ldots x^4-2fx^2-8\sqrt{h}\times x+f^2-4g=0,$$

dans laquelle une racine doit nécessairement être $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$.

391. Maintenant pour résoudre une équation quelconque du quatrième degré, comparons-la d'abord à l'équation A; ce qui exige que le second terme lui manque, et que le premier n'ait que l'unité pour coëfficient, choses possibles dans tous les cas (351 et 352); et de cette comparaison nous tirerons les valeurs que doivent avoir les coëfficients de l'auxiliaire, de laquelle on déduira ensuite les racines de la proposée. Soit donc,

$$(B)\ldots x^4-ax^3-bx-c=0$$

qu'on peut prendre pour une formule générale, qui représente toutes les équations du quatrième degré. Pour déterminer les coëfficients f, g, h, de son auxiliaire, observons que les premiers membres des équations A et B ne peuvent se réduire à 0, sans que les coëfficients des mêmes puissances de x soient égaux dans l'une et dans l'autre; ce qui donne 1.° $-a=-2f$, ou $f=\frac{a}{2}$. . . . . 2.° $-8\sqrt{h}=-b$, ou bien en élevant au quarré $64h=bb$,

et $h = \frac{1}{64} bb$. 3.° $- c = f^2 - 4g$, ou bien $4g = f^2 + c$; et comme suivant ce que nous avons vu $f = \frac{1}{2} a$, on a $g = \frac{1}{16} a^2 + \frac{1}{4} c$. De telle sorte que l'auxiliaire sera,

$$(C) \ldots z^3 - \tfrac{1}{2} az^2 + (\tfrac{1}{16} a^2 + \tfrac{1}{4} c) z - \tfrac{1}{64} bb = 0 \text{ (*)};$$

laquelle étant résolue par les méthodes du trosième degré, donnera pour racines trois quantités connues, que je suppose être p, q, r ; et de là on conclura que dans l'équation générale du quatrième degré, on a aussi $x = \surd p + \surd q + \surd r$.

392. La seule difficulté qui se présente ici, c'est que rien n'obligeant à faire précéder chacun de ces radicaux d'un même signe, il semble qu'on puisse les faire indifféremment positifs ou négatifs ; et que pouvant alors y trouver huit différentes combinaisons des signes, on n'ait par là huit valeurs de x, au lieu de quatre qu'on en doit avoir. Mais il est aisé de s'assurer que de ces huit combinaisons, il n'y en a que quatre qui puissent avoir lieu dans chaque cas particulier. Car puisque $-8 \surd h = -b$, on a, en changeant les signes de l'un et de l'autre, $8 \surd h = b$ ou $\surd h = \frac{1}{8} b$. Or, $\surd h = \surd p . \surd q . \surd r$. Il faut donc que le produit de ces trois radicaux qui déterminent la valeur de x, soit positif, lorsque $\frac{1}{8} b$ devient positif, en changeant de signe ; ou bien lorsque le coëfficient de x est négatif dans la proposée, après avoir placé tous les termes d'un même côté : le contraire arriverait, si ce coëfficient était positif. Or, le produit de ces trois radicaux ne peut être positif, qu'autant qu'il n'y a point de signes négatifs qui les précèdent, ou qu'ils y sont en nombre pair. Ainsi, lorsque le coëfficient de x sera négatif dans la proposée, après avoir mis tous ses termes du côté de x^4, on aura,

(*) On doit observer qu'ici $\frac{1}{4} c$ est soustrait de $\frac{1}{16} aa$; puisque quand on a $- c$ dans la proposée, il vient $\frac{1}{16} aa + \frac{1}{4} c$; et quand on a $+ c$, il vient ici $\frac{1}{16} aa - \frac{1}{4} c$.

$$x = \text{ou} \ldots \begin{cases} \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} \\ -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} \end{cases}$$

et lorsque ce coèfficient de x sera positif dans la proposée, on aura,

$$x = \text{ou} \ldots \begin{cases} -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} \\ -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} \\ \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} \end{cases}$$

393. Soit l'équation $x^4 - 42x^2 + 64x + 105 = 0$, dont on demande les racines. Pour les trouver, je la compare à l'équation générale B ; et j'ai, en faisant coïncider les termes homogènes, $-a = -42$, $-b = 64$, $-c = 105$; ce qui donne pour les coèfficients de l'auxiliaire C, $-\frac{1}{2}a = -21 : \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c = 110\frac{1}{4} - 26\frac{1}{4} = 84 : -\frac{1}{64}bb = -64$; donc l'auxiliaire sera ici,

$$z^3 - 21z^2 + 84z - 64 = 0.$$

Or, cette équation étant résolue par la méthode des diviseurs du dernier terme (358), on trouve que ses trois racines sont 1, 4, 16 : et comme ici le coèfficient de x est positif dans la proposée, nous prendrons les signes — qui doivent précéder $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{16}$, en nombre impair, ce qui donnera pour racines,

$$x = \text{ou} \ldots \begin{cases} -1 - 2 - 4 \ldots - 7 \\ -1 + 2 + 4 \ldots\ldots 5 \\ 1 + 2 - 4 \ldots - 1 \\ 1 - 2 + 4 \ldots\ldots 3 \end{cases}$$

En effet, si l'on multiplie les uns par les autres ces quatre facteurs-ci $(x+7)(x-5)(x+1)(x-3)$, on trouvera que leur produit est égal à la proposée $x^4 - 42x^2 + 64x + 105 = 0$.

394. Soit encore l'équation $x^4 - 10x^2 - 4x + 8 = 0$,

qui étant comparée à la formule générale B, donne $-a=-10$, $-b=-4$, $-c=+8$. Donc en substituant dans l'auxiliaire C, nous aurons $-\frac{1}{2}a=-5$: $\frac{1}{16}aa+\frac{1}{4}c=\frac{100}{16}-2=4\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$: $-\frac{1}{64}bb=-\frac{16}{64}=-\frac{1}{4}$. Ainsi l'auxiliaire sera $z^3-5z^2+\frac{17}{4}z-\frac{1}{4}=0$, dans laquelle, pour faire disparaître les fractions, il suffit de mettre $\frac{u}{2}$ à la place de z, ce qui donnera $\frac{u^3}{8}-\frac{5u^2}{4}+\frac{17u}{8}-\frac{1}{4}=0$; et en multipliant tout par 8, $u^3-10u^2+17u-2=0$. Or, si l'on essaye les diviseurs du dernier terme qui sont ± 2, ± 1, on trouvera par la méthode que nous avons donnée plus haut (358), que -2 réussit; car $\frac{-2}{-2}=1$: $\frac{17-1}{-2}=-8$: $\frac{-10+8}{-2}=1$; et que c'est le seul diviseur qui réussisse. Ainsi une racine de l'équation en u est 2, et pour trouver les autres qui doivent être incommensurables (357), on la divisera par $u-2$, ce qui donnera pour quotient $u^2-8u+1=0$; et celle-ci étant résolue par la formule du second degré, fera trouver $u=4\pm\sqrt{15}$.

A présent, pour avoir les trois racines de l'auxiliaire, c'est-à-dire, les valeurs de p, q, r, on se souviendra qu'on a supposé $z=\frac{u}{2}$, ce qui oblige à prendre la moitié des valeurs de u; ainsi $p=1$, $q=\frac{4+\sqrt{15}}{2}$, $r=\frac{4-\sqrt{15}}{2}$; et si pour avoir un nombre quarré au dénominateur de ces fractions, on multiplie haut et bas dans chacune par 2, on aura $q=\frac{8+2\sqrt{15}}{4}$, $r=\frac{8-2\sqrt{15}}{4}$. Or $\frac{8+2\sqrt{15}}{4}$ est le quarré de $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$, ainsi que $\frac{8-2\sqrt{15}}{4}$ est celui de $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$; et l'on pourra s'en convaincre en élevant ces quantités à leur quarré. Par conséquent, $\sqrt{p}=1$, $\sqrt{q}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{r}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$. Mais puisqu'ici le

coëfficient de x est négatif dans la proposée, il faut (392) que dans les valeurs de x, il n'y ait point de signes — devant $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$; ou bien qu'ils y soient en nombre pair. Ainsi on aura pour ces valeurs,

I. $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=1+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{5}$.

II. $x=\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}=1\frac{-\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{5}$.

III. $x=-\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}=-1\frac{-\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=-1-\sqrt{3}$.

IV. $x=-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}=-1\frac{+\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}=-1+\sqrt{3}$.

Fin de l'Algèbre.

ÉLÉMENTS
DE
MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME PARTIE.
GÉOMÉTRIE.

SECTION PREMIÈRE.
Des propriétés des lignes droites et du cercle.

CHAPITRE PREMIER.
Définitions et notions préliminaires.

1. DÉFINITIONS. I. *La Géométrie est une science qui traite des propriétés de l'étendue, considérée comme quantité continue.*

2. II. On appelle *dimensions* (*) dans l'étendue *les divers sens dans lesquels elle peut être mesurée.* Or, une étendue ou un espace déterminé quelconque, ne pouvant être mesuré qu'en trois sens différents, ne saurait ren-

(*) *Dimension* vient de *dimetiri*, mesurer.

fermer plus de trois dimensions ; l'une est sa *longueur*, l'autre sa *largeur*, la troisième sa *profondeur*.

3. III. Quand on considère dans l'étendue ses trois dimensions réunies, elle prend le nom de *solide*. On l'appelle *surface*, quand on n'y considère que deux dimensions ; et alors l'une en est la longueur, l'autre la largeur. La notion de la *ligne* se forme en faisant abstraction de deux dimensions, et ne considérant que la troisième qui, alors est appelée *longueur*. Enfin, si l'on fait abstraction des trois dimensions à la fois, l'esprit ne peut concevoir aucune partie étendue ; et cette *négation* de toute étendue est appelée un *point*.

4. COROLLAIRE. On conclura de ces définitions ; 1.° *que l'intersection de deux lignes est un point*. Car si c'était une ligne (FIG. 1.), dans ce que AB laisserait sur CD en la coupant, on pourrait prendre la largeur de CD, et réciproquement. Donc les deux lignes AB et CD auraient une largeur, ce qui est contre leur définition (3).

5. 2.° *Que le point est la limite de la ligne, mais qu'il n'en est pas partie*. En effet, rien n'empêche de concevoir qu'une ligne est terminée là où une autre la coupe ; et puisque cette section est un point, la limite le sera aussi.

Mais la négation d'étendue ne pouvant constituer une étendue réelle, des points réunis ne sauraient former une ligne, ou en être conçus comme parties.

6. IV. *Une ligne est droite lorsqu'elle est la plus courte, qu'on peut tirer entre les deux points, qui sont ses limites*. C'est pourquoi elle mesure l'éloignement de ces points.

7. COROLLAIRE. 1.° *Entre deux points donnés on ne peut donc tirer qu'une seule ligne droite*. Car le chemin qui mène d'un point à un point ne saurait être le plus court de tous, s'il y en a un autre d'égale longueur.

8. 2.° *Deux lignes droites ne peuvent avoir deux points communs, sans se confondre*. Car si les lignes (FIG. 2) ABC,

ADC qui ont deux points communs, sans se confondre, étaient droites, on pourrait tirer deux droites différentes de A à B, ce qui est impossible (7).

9. V. *Un plan n'est autre chose qu'une surface sur laquelle une ligne droite peut s'appliquer en tout sens;* et c'est toujours la moins étendue de toutes les surfaces, qu'on peut imaginer entre les lignes qui lui servent de limites.

10. VI. On appelle *figure* une étendue quelconque renfermée entre des limites; et si toutes les parties de cette étendue sont sur le même plan, la figure est appelée *plane.*

11. VII. *Le cercle est une figure plane, dans laquelle toutes les droites tirées d'un point en dedans, jusqu'à la ligne qui la termine, sont égales.* Ce point C (FIG. 3) est appelé le *centre*; la ligne ABDE, qui termine la figure, est la *circonférence*; les droites égales CA, CB, CF, tirées du centre à la circonférence, sont les *rayons*: une droite, comme BE, qui, passant par le centre, se termine de part et d'autre à la circonférence, est un *diamètre*; et si elle ne passe pas par le centre, comme FG, elle est une *corde*; une partie quelconque de la circonférence, comme AB, BG, est un *arc*; et une portion de cercle, par exemple, ABC, renfermée entre un arc et deux rayons, est un *secteur*; tandis que celle qui est renfermée entre un arc et sa corde, par exemple, GFD, est un *segment.*

12. COROLLAIRE. On conclura de ce que nous venons de dire, 1.° *Que si une droite* AC *fait une révolution entière sur le point* C, *en restant toujours dans le même plan, elle décrira un cercle*; puisque dans la ligne qui terminera cette figure, les distances de tous les points au point C seront égales, étant toutes mesurées par la ligne AC.

13. 2.° *Que dans un même cercle tous les diamètres sont égaux*, puisque chacun vaut deux rayons, et que ceux-ci sont tous égaux (11).

14. 3.° *Que chaque diamètre* BE *partage le cercle en deux parties égales.* Car si la partie BDEC était plus petite que BAEC, en la plaçant sur celle-ci, elle ne se confondrait pas avec elle; et on pourrait la représenter par BHEC, dans laquelle le rayon HC serait plus court que AC. Donc tous les rayons du même cercle ne seraient pas égaux, ce qui est absurde (11).

15. 4.° *Que la courbure du cercle* (*) *est uniforme*; car si on le coupe dans tous les sens par des diamètres, et qu'on conçoive une moitié posée sur l'autre, les arcs terminant ces moitiés se confondront toujours; ce qui ne peut arriver sans que leur courbure soit la même dans toutes les parties.

16. C'est par rapport à cette uniformité de courbure, qu'il a été possible de partager la circonférence du cercle en un certain nombre d'arcs égaux, lequel a été fixé à 360, pour les cercles de toute grandeur. Chacun de ces arcs qui est $\frac{1}{360}$ de la circonférence, est appelé un *degré*, et se désigne par ce caractère (°): le degré a été partagé en soixante parties égales, qu'on appelle *minutes*, et dont le signe est celui-ci (′): la minute en soixante *secondes* désignées par (″): la seconde en soixante *tierces*, qu'on représente par (‴) etc. De façon que pour exprimer soixante degrés, vingt minutes, douze secondes, huit tierces, on écrit 60° 20′ 12″ 8‴.

17 COROLLAIRE. Puisque les degrés, ainsi que les minutes sont des parties aliquotes de la circonférence, *leur grandeur doit varier, suivant la grandeur de la circonférence dans laquelle on les prend.*

(*) On prend souvent la circonférence pour le cercle.

CHAPITRE II.

Des propriétés qui résultent de la comparaison de deux lignes droites.

18. Toutes les propriétés qu'une ligne droite peut avoir relativement à une autre, résultent de quelque rapport particulier, sous lequel on compare ces deux lignes. Or, comme on ne saurait les comparer que quant à leur grandeur ou quant à leur situation, il s'ensuit qu'elles ne peuvent avoir d'autres propriétés que celles qui dérivent ou de leurs *rapports de grandeur*, ou de leurs *rapports de situation*. Nous parlerons peu des propriétés de la première espèce, parce qu'elles sont plutôt l'objet du calcul que celui de la Géométrie. Quant à celles qui sont fondées sur les rapports de situation de deux droites AB, CD (fig. 4 et 5), il faut d'abord, pour en rendre la recherche plus facile, supposer que ces droites sont sur le même plan, et puis concevoir qu'une d'elles, par exemple, AB, fasse une révolution entière sur un de ses points E, afin qu'elle prenne toutes les situations possibles relativement à CD. Alors il peut arriver ou que ce point E appartienne aux deux lignes à la fois (fig. 4), ou qu'il n'appartienne qu'à une seule (fig. 5). Dans le premier cas, le point de rencontre des deux lignes AB, CD, sera fixe et immobile en E, et toutes leurs situations se réduiront ou à se couper ou à se confondre en une seule droite ; ce qui arrivera lorsque AB aura plus d'un point commun avec CD. Dans le second cas, ce point de rencontre sera continuellement mobile ; et par rapport à AB, il s'approchera et s'éloignera alternativement du point E, tantôt dans la partie AE, tantôt dans la partie BE. Il faut donc que, dans le passage de AE à BE, il y ait une situation telle que ce point de rencontre ne se trouve ni

dans AE, ni dans BE : car n'y ayant pas de raison de le supposer d'un côté plutôt que de l'autre, ou bien il faut dire qu'il n'est nulle part, ou bien qu'il est des deux côtés à la fois ; ce qui est absurde (8).

19. COROLLAIRE. On conclura de ce que nous venons de dire, que quand deux droites sont sur le même plan, toutes les situations qu'elles peuvent avoir l'une par rapport à l'autre, se réduisent à ces trois-ci : 1.° à se confondre en une seule, et alors je les appelle *coïncidentes* : 2.° à se couper ou à pouvoir se couper, si on les prolonge; et, dans ce cas, je les appelle *concurrentes* : 3.° enfin, à ne pouvoir point se couper à quelque distance qu'on les prolonge; et, dans cette situation, elles sont dites *parallèles*.

20. La coïncidence de deux lignes droites ne présente d'autre propriété si ce n'est que l'une peut être *négative* par rapport à l'autre. Car si des deux lignes AB, CD (FIG. 4), on en forme une seule AD (FIG. 6), de telle sorte que l'*origine* de chacune soit censée en E, il faudra, pour tracer ED, aller de E en D, et pour tracer EA, aller de E en A : ce qui suffit pour les rendre opposées de la seule manière dont elles peuvent le devenir. (Voyez disc. prél. n.° 36).

21. Quand deux lignes concurrentes se rencontrent, on dit alors qu'elles sont *inclinées* l'une à l'autre ; et comme il y a une infinité de situations différentes, dans lesquelles elles peuvent se rencontrer, on dira aussi que leur *inclinaison* peut varier à l'infini.

22. REMARQUE. Il faut cependant observer que le prolongement de deux lignes BA, BC (FIG. 7) ne saurait faire varier leur inclinaison; car si cela était ainsi, comme ces lignes peuvent être prolongées à l'infini, elles pourraient tellement varier leur inclinaison ou leur situation par ce moyen, qu'elles deviendraient ou coïncidentes

ou parallèles, sans que les points A, B, C eussent changé de place, ce qui est absurde.

23. DÉFINITION. *Un angle n'est autre chose que l'inclinaison de deux lignes qui se rencontrent, sans se confondre.* On le désigne par trois lettres ABC dont celle du milieu B répond au sommet, et quelquefois par une seule, et c'est alors celle du sommet.

24. COROLLAIRE. Puisque l'inclinaison de deux droites peut varier à l'infini, il s'ensuit qu'un angle peut aussi recevoir toutes les variations possibles, et ces variations se réduisent à ce qu'un de ses côtés soit plus ou moins éloigné de la coïncidence avec l'autre : ainsi le côté BE est plus éloigné de coïncider avec AB, que ne l'est BD, que ne l'est BC. C'est par là seulement, non par la longueur des côtés (22), que les angles peuvent être plus grands les uns que les autres. *Ils sont donc, sous ce rapport, de vraies quantités, et par conséquent susceptibles de mesure.*

25. Pour mesurer un angle ABE, le moyen le plus simple est d'en prendre un autre à volonté tel que *abc*, qu'on fera servir d'unité de mesure ; et de chercher ensuite combien de fois cette unité est contenue dans l'angle à mesurer. Pour cela, on posera le sommet *b* sur le sommet B, le côté *ab* sur le côté AB, et on appliquera l'angle *abc* sur ABE autant de fois qu'il se pourra. *Par là, on découvrira le rapport de grandeur de l'unité* abc *avec* ABE *c'est-à-dire, qu'on mesurera l'angle* ABE.

Mais puisque la grandeur des côtés n'influe point sur la grandeur de l'angle (22), supposons qu'on prenne le côté $ab = AB$, et que du point B, comme centre, on décrive l'arc ACDE, tandis que du point *b* on décrit l'arc *ac*. Il est évident qu'on trouvera, par la superposition, que l'arc *ac* est contenu dans l'arc ACDE, autant de fois que l'angle unité *abc* est contenu dans l'angle mesuré ABE. Si donc l'arc *ac* est, par exemple, d'un degré, le nombre

des degrés de l'arc ACDE déterminera combien de fois l'angle ABE contient celui qui sert d'unité de mesure ; ou bien il exposera le rapport de grandeur de l'angle ABE avec son unité. D'où l'on peut conclure *qu'un arc de cercle renfermé entre les côtés d'un angle et décrit du sommet comme centre, est le vrai* exposant *de la valeur de cet angle*. Ainsi nous dirons qu'un angle est de 20°, 30°, etc. lorsque cet arc sera de 20°, 30°, etc.

26. DÉFINITIONS I. *Si une droite* AB, (FIG. 11) *rencontrant une droite* CD, *sans la couper, fait avec elle deux angles égaux* ABC, ABD, *chacun est appelé* droit ; *s'ils sont inégaux* (FIG. 8), *le plus grand est* obtus, *le plus petit est* aigu.

II. *On appelle* complément *d'un angle celui qu'il faudrait ajouter à cet angle pour le rendre égal à un droit ; et* supplément, *celui qu'il faudrait lui ajouter pour le faire égal à deux droits.*

27. THÉORÈME I. *Qnand une droite en rencontre une autre sans la couper, elle fait avec elle deux angles qui valent en somme une demi-circonférence ou* 180°.

DÉMONSTRATION. Supposons que la droite AB (FIG. 8) rencontre CD, sans la couper, et que du point B avec une ouverture de compas quelconque on décrive l'arc de cercle CAD, qui coupe en deux points C et D la ligne CD. Cet arc mesurera les deux angles ABC, ABD (25) : de plus, puisque, par la construction, la droite CD passe par le centre B, elle sera un diamètre (11), et l'arc CAD, vaudra une demi-circonférence (14). Donc, etc.

28. COROLLAIRE I. *Un angle droit vaut donc* 90° *ou le quart de la circonférence.* Car si l'angle ABC est droit, il égale ABD (26). Or, ABC + ABD = 180° ; donc si ces angles sont droits, chacun vaut 90° ou le quart de la circonférence.

29. II. Un angle obtus vaut plus de 90°, et un angle aigu vaut moins (26). D'où il s'ensuivra que *le complément d'un angle obtus est négatif, et que celui d'un angle*

aigu est positif. Car pour réduire un angle obtus, par exemple, celui de 100° à 90°, il faut lui ajouter un angle négatif de 10°, et écrire 100° — 10° = 90° : au contraire, pour réduire un angle aigu, par exemple, celui de 80° à 90°, il faut lui ajouter l'angle positif de 10°, en écrivant 80° + 10° = 90°.

30. III. *Si deux droites se coupent, les quatre angles qu'elles forment autour du point de section, valent en somme* 360°. Car si AG coupe CD, la somme des angles est 180° d'un côté de CD, et 180° de l'autre. Et comme tous ceux qu'on pourrait former autour du point B ne valent en somme que ces quatre, il s'ensuit qu'ils valent aussi 360°.

31. IV. Quand deux droites se coupent, comme AG, DC, les deux angles qui sont du même côté d'une de ces lignes, comme ABC, ABD, ou ABD, DBG, sont appelés *angles de suite* ; et l'on voit *qu'ils sont toujours suppléments l'un de l'autre.*

32. V. *Quand deux droites* AG, CD *se coupent, les angles opposés au sommet, savoir,* ABC et DBG, ABD et CBG *sont égaux.* Car puisque ABC + ABD = 180°, et que ABD + DBG = 180°, on a ABC + ABD = ABD + DBG : ou bien, ôtant ABD de part et d'autre, on a ABC = DBG ; donc aussi leurs suppléments, ABD ; CBG, seront égaux.

CHAPITRE III.

Des parallèles, des perpendiculaires et des obliques.

33. DÉFINITIONS. I. Deux ou plusieurs lignes droites sont *parallèles*, lorsqu'étant sur le même plan, elles ne peuvent se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge.

34. II. Elles sont *perpendiculaires* l'une à l'autre, lorsqu'en se rencontrant, elles font des angles droits ; et *obliques* lorsqu'elles font des angles obtus ou aigus.

35. III. Quand deux droites AB, CD (FIG. 9), soit parallèles, soit concurrentes, sont coupées par une troisième SR (qu'on appelle *sécante*) les angles qui sont entre les deux lignes coupées, tels que a, b, e, f, sont appelés *internes*, et ceux qui sont en dehors, comme d, c, h, g, *externes* : on nomme *alternes* ceux qui sont, l'un à droite, l'autre à gauche de la sécante : ainsi a et f sont alternes et internes à la fois, c et h sont alternes et externes. Enfin on appelle *correspondants* les angles qui, étant du même côté de la sécante, sont chacun au dessus, ou chacun au dessous des droites AB, CD ; tels sont les angles c et f, a et h, etc.

36. IV. Quand deux ou plusieurs angles B, b (FIG. 14), auront leur sommet du même côté d'une ligne droite B, b, nous appellerons côtés *correspondants* les deux qui sont à la droite ou à la gauche de l'angle. Ainsi AB et ab, BC et bc sont correspondants.

37. AXIOME. *Si deux droites* AB, CD (FIG. 9), *sont coupées par une troisième* S R, *de façon que la somme des angles internes, soit d'un côté de la sécante plus petite que de l'autre, ou bien si* $a + e < b + f$, *elles concourront, et réciproquement.* Et comme on ne peut avoir $a + e < b + f$, sans avoir $a + e < 180°$, et $b + f > 180°$; puisque (27) $a + b + e + f = 360°$, il s'ensuit que *si deux droites concourent, la somme des angles internes vaut moins de* 180° *d'un côté de la sécante, et plus de* 180° *de l'autre ; et réciproquement.*

38. THÉORÈME I. *Quand deux parallèles* AB, CD *sont coupées par une sécante* SR, *les angles alternes-internes sont égaux entre eux, ainsi que les alternes-externes et les correspondants ; et réciproquement.*

DÉMONSTRATION. 1.° $a = f$; car $a + e = 180°$ (sans quoi AB

AB et CD concourraient). Or, (31) $e + f = 180°$. Donc $a + e = e + f$, ou bien $a = f$, et partant $b = e$. Or, (32) $c = a$, $h = f$; donc $c = h$, et partant $g = d$; d'ailleurs $d = b$, donc $g = b$, et $f = c$.

2.° La réciproque est que si deux droites étant coupées par une troisième, les angles alternes ou correspondants sont égaux, ces deux lignes sont parallèles. Car si $a = f$, puisque $f + e = 180°$, de même $a + e = 180°$. Donc les droites AB, CD ne sont pas concurrentes (37). Elles sont donc parallèles.

39. COROLLAIRE. Il suit de là que *si la ligne* SR *est perpendiculaire à une des deux parallèles, elle le sera à l'autre.* Car si les angles d et c sont droits, leurs correspondants e et f doivent l'être aussi.

40. THÉORÈME II. *Deux lignes* AB, EF (FIG. 10.) *parallèles à une troisième* CD *sont parallèles entre elles.*

DÉMONSTRATION. Car puisque AB est parallèle à CD, les angles correspondants SGB, SHD sont égaux, et puisque CD est parallèle à EF, SHD = SIF. Donc SGB = SIF, et par conséquent (38) les deux lignes AB, EF sont parallèles.

41. THÉORÈME III. *Quand deux lignes* AB, CD, (FIG. 11.) *sont perpendiculaires l'une à l'autre, elles se rencontrent ou se coupent sans pencher d'aucun côté.*

DÉMONSTRATION. Puisque les angles en B sont égaux entre eux (34), si l'on dit que AB penche de quelque côté, il faudra dire qu'elle penche autant vers C que vers D; ce qui est absurde.

42. THÉORÈME IV. *Si la ligne* AB *est perpendiculaire sur* CD, *et que le point* B *soit autant éloigné de* C *que de* D, *tout autre point* O *de* AB, *sera autant éloigné de* C *que de* D; *et réciproquement.*

DÉMONSTRATION. 1.° Concevez que la ligne BD tourne

sur AB, en faisant toujours un angle droit avec elle ; alors le point D viendra tomber sur C, puisque (hyp.) BD = BC. Donc AD couvrira AC, et OD couvrira OC : ou bien AD = AC, OD = OC, etc.

2.° L'inverse est, *que si le point* A *est autant éloigné de* C *que de* D, *ainsi qu'un autre point* B, *la ligne* AB *sera perpendiculaire sur* CD. Car elle ne penchera d'aucun côté sur CD, ce qui rendra les angles ABC, ABD égaux, et par conséquent droits. Donc (34) AB sera perpendiculaire sur CD.

43. COROLLAIRE. Il suit de là que *les obliques* AC, AD, *qui, partant d'un même point* A *d'une perpendiculaire* AB, *se terminent sur l'autre* CD *à des distances égales du point* B, *sont égales entre elles, et réciproquement.*

44. THÉORÈME V. *La perpendiculaire* AB *est plus courte qu'une oblique quelconque* AD, *tirée du même point* A *sur la ligne* CD.

DÉMONSTRATION. Prolongez la perpendiculaire AB jusqu'en P, de façon que vous ayez AB = BP ; ce qui donnera (43) AD = PD ou bien $AD = \frac{AD + PD}{2}$; tandis que par la construction, $AB = \frac{AP}{2}$. Or, AP < AD + PD (6). Donc AB < AD.

45. COROLLAIRE I. *La perpendiculaire* AB *mesure donc la distance du point* A *à la ligne* CD ; car cette distance doit être mesurée par la ligne la plus courte qu'on peut mener entre deux.

46. II. *Du point* A *on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire sur* CD ; puisque le plus court chemin pour aller du point A à la ligne CD doit être unique, d'où il suit que *deux perpendiculaires élevées sur la même ligne* CD, *sont parallèles entre elles.* Car si elles ne l'étaient pas, elles concourraient en quelque point, et de ce point on pourrait

abaisser deux perpendiculaires sur la même ligne CD; ce qui est impossible.

47. PROBLÈME I. *Sur un point donné dans une droite élever une perpendiculaire à cette droite.*

SOLUTION. Si ce point, comme B, n'est pas à l'extrémité de la ligne donnée, prenez sur la même deux points C, D, à égale distance du premier : et de ces points C et D décrivez d'une même ouverture de compas deux arcs de cercle qui se couperont en A, joignez par une ligne droite le point A et le point B, ce sera la perpendiculaire cherchée (42).

Si le point sur lequel il faut élever la perpendiculaire est à l'extrémité de la ligne donnée CD, prolongez-la, s'il se peut, pour opérer comme ci-dessus; et si, par des circonstances locales, ce prolongement est impossible, comme il arrive quelquefois dans la pratique, vous suivrez une autre méthode dont nous parlerons ci-après (72).

48. PROBLÈME II. *Partager une droite donnée* AB (FIG. 12) *en deux parties égales.*

SOLUTION. Des points A et B et d'une même ouverture de compas, décrivez d'un côté deux arcs qui se coupent en E : des mêmes points A et B et d'une même ouverture de compas (qui peut cependant être différente de la première) décrivez de l'autre côté de la droite donnée, deux arcs qui se coupent en D, joignez par une droite les points de section E et D, et le point C, où elle coupera AB, sera le milieu de AB; car ED étant perpendiculaire sur AB (42), et le point E étant à égale distance de A de B, le point C le sera aussi, ou bien on aura AC = CB.

49. THÉORÈME VI. *Des perpendiculaires* RS, PQ (FIG. 13) *entre des parallèles* AB, CD *sont égales, et réciproquement.*

DÉMONSTRATION. 1.° Du point du milieu N entre S et Q, élevez la perpendiculaire NM. Concevez que les lignes ND, MB, faisant toujours des angles droits en N et en

M, la figure soit pliée sur MN. Alors ND tombera sur CN et MB sur AM : et puique NQ = NS, le point Q tombera sur S ; si donc le point P ne tombait point sur R mais sur *q*, on pourrait du point S tirer deux perpendiculaires SR, S *q* sur AB; ce qui est absurde. Donc, 1.° PQ = RS.

2.° L'inverse du théorème est que *si sur une droite* CD *on élève deux perpendiculaires égales* PQ, RS, *la droite* AB, *qui passera par leurs extrémités, sera parallèle à* CD. Car les angles en S et en Q restant droits, l'on peut concevoir qu'aux points O et G, qui divisent également PQ et RS, l'on a plié la partie inférieure de la figure sur la supérieure, de façon que le point Q tombe sur P et S sur R ; et par conséquent la ligne CD, ayant deux points S et Q, communs avec AB, se confondra avec elle. Donc l'angle OQD = OPB, ou bien leur somme sera 180° ; ce qui ne peut être (37), si les deux lignes AB, CD, ne sont parallèles. Donc, etc.

50. THÉORÈME VII. *Deux angles sont égaux, lorsque leurs côtés correspondants sont ou parallèles ou perpendiculaires entre eux.*

DÉMONSTRATION. 1.° Si AB et *ab*, BC et *bc* (FIG. 14) sont parallèles, et qu'on prolonge les côtés BC, *ba* qui ne sont pas correspondants, il se formera un angle en D qui sera alterne-interne de B et de *b*. Donc B = D = *b*, ou bien B = *b*.

2.° Si *ab* (FIG. 15) est perpendiculaire sur son correspondant B et *bc* sur BC, concevez que l'angle *b* restant le même, ses côtés *ab*, *bc* décrivent chacun un quart de circonférence autour du point *b*. Alors *ab* deviendra parallèle à AB et *bc* à BC. Donc, par la première partie de ce théorème, l'angle *b* égalera B. Ils étaient donc égaux auparavant.

51. REMARQUE. Pour l'égalité de deux angles, il ne suffit pourtant pas que leurs côtés quelconques soient parallèles.

Car on peut toujours construire un angle aigu, dont les côtés seront parallèles à ceux d'un angle obtus, pourvu que l'un soit supplément de l'autre, tels sont les angles ABC, *abc* (FIG. 16) dans lesquels les côtés AB et *ab*, BC et *ba* sont parallèles; mais non pas correspondants.

CHAPITRE IV.

De quelques propriétés des lignes droites, considérées dans le cercle.

52. OUTRE les lignes droites, dont nous avons parlé plus haut, le cercle contient encore celles qu'on désigne sous le nom de *sécantes* et de *tangentes*. On appelle sécante toute droite ST (FIG. 17) qui, coupant la circonférence, se termine hors du cercle; et tangente T*t* celle qui touche la circonférence sans la couper, même étant prolongée.

Si l'on conçoit que la sécante ST tourne sur son extrémité T du côté de *t*, les deux points de sections S, *s*, s'approcheront toujours l'un de l'autre, de façon qu'en B ils se réuniront en un seul; et dans ce moment la sécante cessera de l'être pour devenir tangente. On peut donc dire que la *tangente n'est autre chose qu'une sécante évanouissante.*

53. THÉORÈME I. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les cordes égales sous-tendent des arcs égaux, et réciproquement.*

DÉMONSTRATION. 1.° Si la corde DF = RQ, je dis que l'arc DBF = RAQ. Car si on applique la corde DF sur son égale RQ, le point D sur R, et le point F sur Q, l'arc DBF couvrira RAQ. Car si cela n'était pas ainsi et qu'un d'eux fût, par exemple, R*a*Q, les rayons du même

cercle C*a*, CA ne seraient pas égaux, ce qui est absurde (11). Donc 1.° etc.

2.° Si l'arc RAQ = DBF, ils pourront se couvrir parfaitement, et alors le point F tombera sur Q, et le point D sur R. Donc la ligne droite qui joindra D et F, joindra R et Q, ou bien la corde RQ égalera DF.

54. SCOLIE. Il est aisé de voir que la vérité de ce théorème dépend de l'uniformité de courbure dans le cercle, et que l'on peut aussi conclure de cette même uniformité : 1.° Que dans des cercles égaux les cordes inégales sous-tendent des arcs inégaux, et réciproquement : 2.° Que les cordes croissent ou décroissent en s'approchant ou s'éloignant du centre ; de façon que celles qui en sont également éloignées sont égales, et que le diamètre est la plus grande de toutes.

55. THÉORÈME II. *De ces trois propriétés d'une droite, être perpendiculaire à une corde, la diviser en deux parties égales, et passer par le centre, deux étant données, la troisième s'ensuit nécessairement.*

DÉMONSTRATION. 1.° Si AB est perpendiculaire sur DF, et que de plus elle la partage en deux également au point M, je dis qu'elle passe par le centre C du cercle. Car MD = MF (hyp.) donc (42) chaque point de la perpendiculaire AB est autant éloigné de D que de F ; et de plus tous les points également éloignés de D et de F sont dans cette perpendiculaire. Donc le centre du cercle y sera aussi.

2.° Si AB est perpendiculaire sur DF, et qu'elle passe par le centre C, elle partage DF en deux parties égales. Car puisque C est le centre, il est également éloigné de D et de F : puisque AB est perpendiculaire, chacun de ses points est également éloigné des mêmes points D et F. Donc DM = MF.

3.° Si AB divise la corde DF en deux également, et

qu'elle passe par le centre C, elle est perpendiculaire à cette corde. Car la première condition donne DM = FM, et la seconde CD = CF. Donc (42) AB est perpendiculaire sur DF.

56. THÉORÈME III. *Une perpendiculaire* AB *qui partage la corde* EH *en deux parties égales, partage aussi l'arc sous-tendu en deux arcs égaux.*

DÉMONSTRATION. Par l'hypothèse le point N est autant éloigné de E que de H; et par conséquent tout autre point de la perpendiculaire AB sera autant éloigné de E que de H (42). Donc les cordes BE, BH, qui mesurent deux de ces distances seront égales; ainsi que les arcs EDB, HFB, sous-tendus par ces cordes, sont égaux; ou bien l'arc EBH est divisé au point B en deux parties égales.

57. COROLLAIRE. *Les arcs du même cercle renfermés entre deux parallèles* EH, DF, *sont égaux.* Car si du centre C on abaisse la perpendiculaire CB sur ces parallèles, on aura l'arc EDB = BFH, et l'arc DB = BF. Donc en retranchant cette dernière équation de la précédente, il restera l'arc ED = HF.

58. THÉORÈME IV. *Le rayon* CB *qui aboutit au point de contact* B *est perpendiculaire à la tangente en ce point, et réciproquement.*

DÉMONSTRATION. Toute ligne autre que CB, menée du centre sur cette tangente devra sortir de la circonférence, et sera par conséquent plus longue que le rayon de contact CB. Ce rayon est donc la plus courte ligne qu'on puisse mener du centre sur la tangente; il lui est donc perpendiculaire (44).

L'inverse est, *que si* T*t est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* CB, *elle sera tangente au point* B. Car si elle entrait dans le cercle, le rayon mené au point de sa sortie, t, par exemple, en *s*, égalerait le rayon CB. Donc CB ne

serait pas plus courte que toute autre ligne menée du centre sur T*t*; elle ne lui serait donc pas perpendiculaire; ce qui est contre la supposition. Donc, etc.

59. COROLLAIRE. Il suit de là, 1.° que toute ligne comme EB, qui tombera sur l'extrémité du rayon, sans lui être perpendiculaire, entrera dans le cercle, puisqu'elle ne pourra se confondre avec la tangente.

2.° Que le point B (FIG. 18) pouvant appartenir à une infinité de courbes différentes, comme sont les arcs décrits avec les rayons CB, DB, EB, tant en dessus qu'en dessous de T*t*, la même ligne T*t* sera tangente à toutes ces courbes, et que, par conséquent, *entre l'arc* XBY *et sa tangente* Tt, *on peut mener une infinité de courbes qui toucheront l'arc sans le couper; mais qu'on ne peut y mener qu'une seule ligne droite* T t *qui le touche et ne le coupe pas.*

60. PROBLÈME I. *Diviser l'arc* DBF (FIG. 17), *ou l'angle* DCF *en deux parties égales.*

SOLUTION. Ayant tiré la corde DF, menez du centre C le rayon CB, perpendiculaire sur cette corde; il partagera l'arc, et par conséquent l'angle en deux parties égales.

61. PROBLÈME II. *Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés* B, A, D (FIG. 19), *pourvu qu'ils ne soient pas en ligne droite.*

SOLUTION. D'un de ces points A, menez aux deux autres les droites AB, AD : sur le milieu de chacune, élevez les perpendiculaires PC, QC, et le point C où ces perpendiculaires se rencontreront, sera le centre du cercle dont la circonférence passera par les trois points donnés B, A, D.

62. REMARQUE. Puisque les deux perpendiculaires PC, QC ne peuvent se rencontrer qu'en un seul point (8), il s'ensuit *qu'il n'y a qu'un seul cercle, dont la circonférence puisse passer par les trois points donnés.*

63. PROBLÈME III. *Trouver le centre d'un arc donné* BAD.

SOLUTION. Tirez dans cet arc deux cordes quelconques, aboutissant au même point, comme BA, DA : élevez sur le milieu de chacune les perpendiculaires PC, QC, le point C où elles se couperont, sera le centre du cercle auquel appartient l'arc BAD.

64. PROBLÈME IV. *D'un point* A, *pris hors d'une droite* CD (FIG. 11), *abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

SOLUTION. Décrivez de ce point A un arc de cercle *ced* qui coupe la ligne donnée aux points *c*, *d*, divisez *cd* en deux également au point B (48); et c'est par ce point que passera la perpendiculaire demandée (42).

On a là un moyen de mener par le point A une parallèle à la ligne CD ; il suffira d'abaisser de ce point la perpendiculaire AB, et d'élever sur le point A une perpendiculaire à AB ; celle-ci sera nécessairement parallèle à CD (32).

PROBLÈME V. *Sur un point* A *d'une droite donnée* AB (FIG. 20) *construire un angle égal à un angle donné* D.

SOLUTION. Du point D comme centre et avec une ouverture de compas quelconque, décrivez l'arc EF, du point A et avec la même ouverture, décrivez l'arc GX : ensuite avec un rayon égal à la corde EF, décrivez du point G l'arc *a* C *b*, et tirant la droite AC vous aurez l'angle demandé. Car ayant les cordes égales FE, CG, et les rayons égaux AG, DE, on aura l'arc CG = FE ; et par conséquent les angles A et B, mesurés par ces arcs, seront égaux.

CHAPITRE V.

De la mesure des angles considérés dans le cercle.

La situation d'un angle par rapport à la circonférence d'un cercle peut être telle, qu'il ait son sommet au centre, ou bien entre le centre et la circonférence, ou bien à la circonférence, ou bien enfin hors de la circonférence ; de telle sorte que les côtés en soient les tangentes ou les sécantes. Nous ne dirons rien de la mesure de celui qui a son sommet au centre, parce que nous l'avons déja déterminée ailleurs (25). Il nous reste à mesurer les angles dans les autres situations, sans avoir recours à d'autre cercle qu'à celui qui est touché ou coupé par leurs côtés.

65. Théorème I. *L'angle aigu* ABD (fig. 21) *formé à la circonférence du cercle par une tangente et par une corde* (*) *a pour mesure la moitié de l'arc* BFD, *sous-tendu par la corde.*

Démonstration. Soient le rayon de contact BC, et le rayon FC perpendiculaire à la corde DB ; ce qui rend l'arc DF = FB (55), ou bien BF, moitié de BFD. Cela posé, je dis que l'angle ABD a pour mesure l'arc BF. Car l'angle ABD = FCB, (puisque, par la construction, leurs côtés homologues sont perpendiculaires.) mais FCB a pour mesure l'arc BF (25). Donc l'angle aigu ABD a pour mesure l'arc BF.

66. Corollaire I. *L'angle obtus* DBH *a aussi pour mesure la moitié de l'arc* DGEB *renfermé entre ses côtés.* Car cet angle joint à l'angle aigu ABD, a pour mesure la moitié de la circonférence. Or, ABD est mesuré par la moitié de

(*) Cet angle est appelé *Angle du Segment.*

BFD; donc la moitié du reste, savoir $\frac{1}{2}$ DGEB, mesure l'angle DBH.

67. II. *L'angle* DBE, *formé à la circonférence par deux cordes* (*) *a aussi pour mesure la moitié de l'arc* DGE, *renfermé entre ses côtés.* Car DBE = DBH — HBE. Donc DBE a pour mesure $\frac{1}{2}$ DGEB — $\frac{1}{2}$ BE, savoir, $\frac{1}{2}$ DGE.

68. III. *Un angle à la circonférence a donc pour mesure, dans tous les cas, la moitié de l'arc renfermé entre ses côtés.* D'où l'on conclura, 1.° que cet angle est droit, s'il est appuyé sur les extrémités d'un diamètre, comme PAD (FIG. 25); 2.° qu'il ne vaut que la moitié de l'angle au centre, lorsque l'un et l'autre sont appuyés sur le même arc; ainsi (FIG. 23) l'angle AFE = $\frac{1}{2}$ ACE.

69. THÉORÈME II. *L'angle* ABD (FIG. 22), *formé entre le centre et la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc* AD, *renfermé entre ses côtés, plus la moitié de l'arc* FG, *renfermé entre ses côtés prolongés.*

DÉMONSTRATION. Du point F soit menée la corde FE parallèle au côté BD, on aura l'angle ABD = AFE (38); or, celui-ci a pour mesure $\frac{1}{2}$ AD + $\frac{1}{2}$ DE, ou bien $\frac{1}{2}$ AD + $\frac{1}{2}$ GF (57). Donc l'angle ABD a aussi pour mesure $\frac{1}{2}$ AD + $\frac{1}{2}$ GF.

70. THÉORÈME III. *L'angle* ABD (FIG. 23), *formé hors de la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc concave* AED, *moins la moitié de l'arc convexe* FG *renfermé entre ses côtés.*

DÉMONSTRATION. Du point F soit menée la corde FE parallèle au côté BD. L'angle AFE = ABD. Donc l'un et l'autre ont pour mesure $\frac{1}{2}$ AE (68). Or, $\frac{1}{2}$ AE = $\frac{1}{2}$ AD — $\frac{1}{2}$ ED, ou bien $\frac{1}{2}$ AE = $\frac{1}{2}$ AD — $\frac{1}{2}$ FG (57). Donc l'angle ABD, etc.

71. PROBLÈME I. *D'un point* A (FIG. 24), *pris hors du cercle* DT t, *mener deux tangentes à ce cercle.*

(*) On l'appelle *Angle inscrit.*

SOLUTION. Du point A menez au centre de ce cercle la droite AC, et avec un rayon égal à la moitié de cette droite, décrivez une nouvelle circonférence CTA *t* : des points d'intersection T *t* avec la circonférence donnée, tirez au point A les droites TA, *t* A, et ce seront les deux tangentes cherchées.

Car si l'on tire dans le premier cercle les rayons de contact CT, C *t*, les angles CTA, C *t* A, appuyés sur un diamètre dans le second cercle, seront droits. Donc les lignes AT, A *t* seront tangentes (58).

72. PROBLÈME II. *Elever une perpendiculaire sur l'extrémité* A *d'une droite* AB, *qu'on ne peut point prolonger* (FIG. 25).

SOLUTION. D'un point quelconque C pris au dessus de la droite BA et du rayon CA, décrivez une circonférence de cercle qui passera par le point A; et du point D, où cette circonférence coupera la droite donnée BA, tirez le diamètre DP, la perpendiculaire cherchée passera par P, puisque l'angle DAP est droit (68).

CHAPITRE VI.

Des différentes espèces de polygones en général, et du triangle en particulier.

SUIVANT l'étymologie du mot, on doit entendre par *polygone* une figure à plusieurs angles; et comme dans toute figure rectiligne le nombre des angles est le même que celui des côtés, on peut désigner les différentes espèces de polygones par l'une ou l'autre de ces deux choses indifféremment. C'est pourquoi on appelle *trilatère* ou plus communément *triangle*, le polygone qui a trois angles, et par conséquent trois côtés; *quadrilatère*, celui qui en a quatre; *pentagone*, celui qui en a cinq; *exagone*, celui qui

en six, etc. Nous allons d'abord nous occuper des propriétés du triangle, parce qu'elles serviront à découvrir celles des autres polygones.

73. *Le triangle est la plus simple de toutes les figures rectilignes que puisse former la géométrie*, puisqu'on ne peut renfermer un espace par des lignes droites, s'il y en a moins de trois. On voit encore (FIG. 26) qu'avec trois lignes données A, B, C, on ne saurait construire cette figure, si les deux prises ensemble ne sont plus longues que la troisième; ce qui fait *que deux côtés quelconques d'un triangle valent en somme plus que le troisième.*

74. Le triangle considéré par rapport à ses angles est appelé *acutangle*, quand il a tous ses angles aigus; *obtusangle*, quand il a un angle obtus; *rectangle*, quand il a un angle droit. Par rapport à ses côtés, il est appelé *équilatéral*, quand il a tous ses côtés égaux; *isocèle*, quand deux seulement sont égaux; et *scalène*, quand ils sont tous inégaux.

Si du sommet d'un angle quelconque d'un triangle on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, prolongé, s'il le faut, cette perpendiculaire est appelée *la hauteur* du triangle; et le côté, sur lequel elle tombe, en est la *base.*

75. THÉORÈME I. *Tout triangle peut être inscrit dans un cercle.*

DÉMONSTRATION. Inscrire un polygone dans un cercle, c'est faire passer une circonférence de cercle par le sommet de ses angles. Or, les sommets des trois angles d'un triangle n'étant jamais en ligne droite, on peut y faire passer une circonférence de cercle (61). Donc, etc.

76. THÉORÈME II. *La somme des trois angles d'un triangle est toujours* 180°.

DÉMONSTRATION. Si du sommet de l'angle A (FIG. 27), on mène AP parallèle à CB, et qu'on prolonge le côté AC, on a l'angle PAB = ACB, son correspondant : PAB

= ABC, son alterne. Donc les trois angles A + B + C valent en somme tous les angles qu'on peut former sur le point A, et du même côté de la droite CR. Ils valent donc en somme 180° (27).

Si l'on veut se convaincre d'une autre manière de cette importante vérité, qu'on suppose un triangle quelconque DAP (FIG. 25) inscrit dans un cercle : ses trois angles A, D, P, auront leurs sommets à la circonférence et la renfermeront tout entière. Ils vaudront donc en somme 180°.

77. COROLLAIRE I. Un triangle ne peut donc avoir deux angles droits, ni, à plus forte raison, deux angles obtus.

78. II. Dans un triangle un angle quelconque est le *supplément* des deux autres. D'où il suit, 1.° que connaissant deux angles, on connaît le troisième; 2.° que si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre, le troisième angle du premier égalera le troisième du second.

79. III. Quand un triangle a un angle droit, chacun des deux autres est aigu ; et l'un de ceux-là est *complément* de l'autre.

80. IV. Si l'on prolonge un côté quelconque AD d'un triangle DAP, l'angle extérieur BDP égalera la somme des deux intérieurs opposés P + A. Car l'angle extérieur BDP, et la somme des deux intérieurs opposés P + A ont le même supplément; savoir, PDA. Donc l'angle extérieur vaut la somme des deux intérieurs opposés.

81. THÉORÈME III. *Dans tout triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle, le plus petit côté au plus petit angle, et les côtés égaux a des angles égaux* (*).

DÉMONSTRATION. Car inscrivant le triangle dans un cercle, le plus grand côté doit sous-tendre le plus grand arc,

(*) L'inverse de cette proposition ne dit rien de différent de la proposition même.

le plus petit côté le plus petit arc, et les côtés égaux des arcs égaux. Or, les moitiés de ces arcs mesurent les angles opposés (68). Donc, etc.

82. Corollaire. Il suit de là, 1.° que, dans le triangle équilatéral, les trois angles sont égaux; 2.° que, dans le triangle isocèle les angles opposés aux côtés égaux, sont égaux.

Remarque. On voit que l'inverse de chacune de ces dernières propositions est également vraie.

83. Théorème IV. *Si d'un angle quelconque d'un triangle, on tire une perpendiculaire sur le coté opposé* (qu'on appelle la *base* de cet angle), *elle tombera en dedans du triangle, lorsque les deux angles sur la base seront aigus; en dehors, si l'un est obtus; et sur l'extrémité de cette base, si l'un de ces angles est droit.*

Démonstration. 1.° Dans le triangle ABC (fig. 28) qui a deux angles aigus sur la base BC, si la perpendiculaire AP, menée du point A, tombait à l'extrémité C de cette base, elle formerait avec elle l'angle aigu ACB, ou d'autres angles plus aigus, si elle tombait au-delà, ce qui est absurde (34); elle ne peut donc pas tomber hors de cette base.

2.° Si dans le triangle ACD, qui a un angle obtus en C, la perpendiculaire tombait à l'extrémité C, elle formerait en C l'angle obtus ACD; ou un angle plus obtus, si elle entrait dans le triangle. Elle doit donc tomber hors de la base CD.

3.° Si dans le triangle APC, qui a un angle droit en P, la perpendiculaire menée du point A, ne se confondait pas avec AP, on pourrait abaisser du même point A deux perpendiculaires sur la même ligne PC, ce qui est absurde (46). Elle tombera donc sur le point P.

CHAPITRE VII.

Qui traite de l'égalité et de quelques autres rapports, tant des triangles que des parallélogrammes.

ON ne peut mieux prouver qu'une étendue est égale à une autre, qu'en faisant voir que la première, placée sur la seconde, la couvre parfaitement, ou plutôt qu'elle la pénètre dans toutes ses parties. C'est par ce moyen, connu sous le nom de *Méthode de superposition*, que nous avons fait voir ailleurs l'égalité des lignes dans certains cas (49); nous l'emploierons encore ici, pour prouver l'égalité des figures. Et, en général, comme on ne peut entendre par figure plane autre chose que l'espace plan renfermé dans un certain contour ou *périmètre* (10), nous dirons que deux figures planes sont égales, lorsque l'espace qu'elles renferment est égal de part et d'autre (cet espace est encore appelé *l'aire* de la figure).

84. En comparant ensemble deux triangles, nous dirons que le plus grand côté de l'un est *homologue* au plus grand côté de l'autre, le moyen au moyen et le plus petit au plus petit. Et lorsque les angles opposés aux côtés homologues seront égaux de part et d'autre, les triangles seront appelés *équiangles*. Il est aisé de voir que deux triangles peuvent être équiangles sans être égaux; car si dans le triangle ABC (FIG. 29), on décrit *abc*, de façon que les côtés homologues soient parallèles, les angles opposés à ces côtés seront égaux, sans que les triangles le soient; et réciproquement, deux triangles peuvent être égaux, sans avoir ni les angles ni les côtés égaux, ainsi que nous le verrons plus bas.

85. Tout quadrilatère ABCD (FIG. 31) qui a les côtés opposés parallèles est un *Parallélogramme*, et si tous ses angles

angles sont droits, c'est un *rectangle*. Une ligne AB, qui va d'un angle à l'angle opposé, en est la *diagonale*. Et comme on peut prendre pour base du quadrilatère un de ses côtés quelconques, la hauteur sera déterminée par une perpendiculaire élevée sur cette base jusqu'à la rencontre du côté opposé.

86. THÉORÈME I. *Si deux triangles sont équiangles et qu'ils aient de plus un côté égal, les autres côtés seront égaux, et par conséquent les deux figures seront égales en tout.*

Ou bien (FIG. 29) si l'on a l'angle A = *a*, B = *b*, C = *c*, et de plus le côté BC = *bc*, les triangles ABC, *abc* seront égaux en tout.

DÉMONSTRATION. Si l'on conçoit le triangle *abc* placé sur ABC, en sorte que le point *b* tombe sur B, et *c* sur C, le côté *ab* tombera sur AB, puisque les angles *b* et B sont égaux : par une raison semblable *ca* tombera sur CA. Donc l'intersection *a* des côtés *ba* et *ca* tombera sur l'intersection A des côtés BA et CA; et les deux triangles se confondant alors, seront parfaitement égaux en toutes choses.

87. COROLLAIRE I. *Deux triangles sont donc égaux lorsque ayant deux angles égaux, ils ont de plus un côté égal.* Car alors ils sont équiangles (78) avec un côté égal.

88. *Deux droites parallèles* DA, BC, *entre parallèles*, DB, AC (FIG. 31) *sont égales*. Car si, par le sommet des deux angles opposés, on tire la droite BA, les deux triangles BAC, BAD, seront égaux en toutes choses ; puisque outre le côté commun BA, ils sont équiangles. Donc (38) DA = BC et DB = AC. D'où l'on déduit que *dans un parallélogramme les côtés opposés sont toujours égaux.*

89. THÉORÈME II. *Si deux triangles* ABC, abc (FIG. 29), *ont leurs côtés homologues égaux, ils sont équiangles et égaux en surface, par conséquent égaux en tout, et réciproquement.*

DÉMONSTRATION. Posez le côté *bc* sur son égal BC, de façon que *b* tombe sur B, et *c* sur C : avec BA ou son égal *ba* et du centre B, décrivez l'arc DAE : avec CA ou son égal *ca*, et du centre C, décrivez l'arc FAG. Le sommet de l'angle *a* tombera sur l'intersection des deux arcs décrits par *ba* et par *ca* ; de même que le sommet de l'angle A tombera sur l'intersection des deux mêmes arcs décrits par BA et CA. Les points *a* et A tomberont donc l'un sur l'autre, ainsi que, par la construction, *b* tombe sur B, et *c* sur C ; les côtés et les angles se couvriront donc parfaitement ; et par conséquent les deux triangles seront équiangles et égaux.

L'inverse de cette proposition est que *si deux triangles* ABC, abc (FIG. 30) *sont équiangles et égaux en surface, ils ont leurs côtés homologues égaux.* Car puisque l'angle *a* = A, si l'on place le triangle *abc* sur ABC, de façon que le point *a* tombe sur A, et le côté *ab* sur son homologue AB, *ac* tombera sur AC : et je dis encore que les points *b* et *c* tomberont sur B et C. Car autrement, ou bien ils tomberaient tous les deux au dessus de BC, l'un en H, l'autre en E : ou bien tous les deux au dessous, l'un en D, l'autre en G : ou bien l'un sur BC, et l'autre hors de cette ligne en G ou en E : ou bien enfin l'un en E au dessus de BC, et l'autre en D au dessous. Or, dans tous ces cas, on contredirait la supposition : d'abord dans les trois premiers, parce que les deux triangles ABC, *abc*, seraient évidemment inégaux ; et dans le quatrième, parce qu'ils ne seraient pas équiangles ; puisqu'on aurait l'angle *acb* = AED, et que celui-ci, étant extérieur dans le triangle FEC, serait plus grand que l'angle C, qui est un des intérieurs opposés. Donc, etc.

90. COROLLAIRE I. *La diagonale* AB (FIG. 31) *partage donc le parallélogramme en deux triangles équiangles et égaux.* Puisque les deux triangles ABC, ABD, outre le côté commun AB, ont encore BC = DA, BD = AC (88).

D'où il suit *que le parallélogramme est double du triangle de même base et de même hauteur.*

91. II. *Si aux extrémités de deux lignes égales* DA, BC *aboutissent deux autres lignes égales* DB, AC, *le quadrilatère ainsi formé sera un parallélogramme.* Car tirant la ligne AB, les triangles DAB, BAC seront égaux en tout (89). Donc l'angle BAD = ABC, ce qui suppose BC parallèle à DA (38) : de plus l'angle ABD = BAC ; et partant (38) DB est parallèle à AC.

92. On déduira de là une nouvelle méthode de tirer, par un point donné N, une parallèle à la ligne AB (FIG. 32). Car si d'un point quelconque C de cette ligne, on décrit un arc de cercle qui la coupe en D ; qu'avec la même ouverture de compas on décrive du point N l'arc *qp*, et qu'ensuite du point D, avec une ouverture de compas égale à CN, on décrive l'arc S R ; l'intersection O de ces deux arcs sera un nouveau point de la ligne cherchée. Puisque, par la construction, OD=NC et NO=CD ; donc (91) NO et CD sont parallèles.

93. THÉORÈME III. *Si deux triangles* ABC, abc (FIG. 29) *ont un angle égal, renfermé entre des côtés égaux, ils sont équiangles et égaux en tout.*

DÉMONSTRATION. Si l'angle A = *a*, posant le point *a* sur A et le côté *ab* sur AB, *ac* tombera sur AC : d'ailleurs, puisque AB = *ab* et AC = *ac*, le point *b* tombera sur B et *c* sur C. Donc *bc* qui joint les points *b* et *c* se confondra avec BC qui joint les mêmes points. Les deux triangles seront donc égaux en tout.

94. COROLLAIRE. *Si deux droites* AC, DB (FIG. 31) *aboutissent aux extrémités de deux parallèles égales* DA, BC, *elles seront elles-mêmes égales et parallèles.* Car tirant la droite AB, les triangles ABD, BAC, seront équiangles et égaux (93) ; puisque outre le côté commun BA, et BC = DA (hyp.), l'angle ABC = BAD, son alterne-interne. Donc (89) le côté DB = AC : et de plus l'angle

DBA = BAC ; ce qui suffit (38) pour que les lignes DB, AC, soient parallèles ; et que la figure DACB soit un parallélogramme (85).

95. THÉORÈME IV. *Des parallélogrammes* AC, BF (FIG. 33) *qui ont une base commune* BC, *et qui sont renfermés entre les mêmes parallèles* BC, AF, *sont égaux en surface.*

DÉMONSTRATION. AD = BC = EF (85) ; donc ajoutant DE aux lignes EF et AD, on a AE = DF. Or, AB = DC, et en outre (38) l'angle BAE = CDF. Donc le triangle BAE = CDF (93) ; et par conséquent ce qu'ils n'ont pas de commun est égal de part et d'autre, ou bien le quadrilatère ABGD = GCFE. Et si à chacun on ajoute le triangle BGC, les sommes seront encore égales. Or, ces sommes donnent d'un côté le parallélogramme AC ; et de l'autre, le parallélogramme BF. Donc AC = BF.

96. COROLLAIRE. Il suit de là *que deux parallélogrammes* AC, EG (FIG. 34) *renfermés entre deux parallèles* AH, BG, *sont égaux en surface, s'ils ont des bases égales* BC, FG, *quoiqu'elles ne soient pas communes.* Car si l'on joint les points B et E, C et H, le quadrilatère BH sera un parallélogramme (94) qui aura la base BC commune avec AC, et la base EH commune avec EG. Donc (95) BH = AC = EG.

97. THÉORÈME V. *Deux triangles* ABC, DBC (FIG. 35) *ont des surfaces égales, si étant renfermés entre les mêmes parallèles* EF, BC, *ils ont de plus une base commune* BC.

DÉMONSTRATION. Du point B tirez BE parallèle à AC, et du point C tirez CF parallèle à BD (92). Les quadrilatères EC, FB seront des parallélogrammes égaux (85 et 95). Donc les triangles ABC, DBC, qui en sont les moitiés (90), auront des surfaces égales.

98. THÉORÈME VI. *Deux triangles* EGB, FHC, *qui ont des bases égales* BG, CH, *et qui sont renfermés entre les mêmes parallèles* EF, GH, *sont égaux en surface.*

DÉMONSTRATION. Car si on tire BA parallèle à EG et CD parallèle à FH, les parallélogrammes AG ; DH seront

égaux (96); et par conséquent les triangles EGB, FHC, seront égaux aussi (90).

99. THÉORÈME VII. *Si deux triangles égaux en surface* ABC, DBC, (FIG. 36), *ont une base commune* BC, *et leurs sommets* A *et* D *du même côté de cette base, ils sont entre deux parallèles* AD, BC.

DÉMONSTRATION. Car si AD n'était pas parallèle à BC, supposons que ce fût AF, et nous aurions (97) le triangle ABC = BCF. Or (hyp.), ABC = DBC; donc nous aurions DBC = BCF, c'est-à-dire, la partie égale au tout, ce qui est absurde.

100. THÉORÈME VIII. *Si deux triangles égaux en surface* ABC, DEF, (FIG. 37) *ont leurs bases égales* BC, EF, *sur la même ligne* BF, *et leurs sommets* A *et* D *du même côté de cette ligne, ils seront entre deux parallèles* AD, BF.

DÉMONSTRATION. Car si toute autre ligne passant par le point A, par exemple AH, était parallèle à BF, on aurait (98) le triangle HEF = ABC. Or (hyp.), ABC = DEF. Donc DEF = HEF, ce qui est absurde.

101. THÉORÈME IX. *Deux triangles* ABC, ACD, (FIG. 38) (*et par conséquent deux parallélogrammes*) *qui ont même hauteur, sont entre eux comme leurs bases* BC, CD.

DÉMONSTRATION. 1.° Si les bases BC, CD, sont commensurables, supposé qu'elles soient divisées en parties égales aux points H, E, F, G; et que du point A, on tire les droites AG, AF, etc. tous les triangles ABG, AGF, etc. sont égaux (98): de plus il s'en trouve autant dans ABC qu'on a pris de parties égales dans BC, et autant dans ACD qu'il y a de ces parties dans CD. Donc ABC : ACD :: BC : CD.

2.° Si l'on n'avait pas la même proportion, en supposant (FIG. 39 et 40) que les bases BC, CD, fussent incommensurables, on aurait donc ABC : ACD > ou < BC : CD; ou bien prenant CG > CB (FIG. 39) et < CB (FIG. 40), on

aurait ABC : ACD :: CG : CD. Or, cette proportion est impossible. Car supposons d'abord que ED est une aliquote exacte de CD et plus petite que BG : ensuite que BF soit ce qu'il faut ajouter à BC (FIG. 39) ou retrancher de BC (FIG. 40), afin que ED la mesure exactement, alors on a BF < ED (*). Or (hyp.), ED < BG, donc BF < BG; et par conséquent le point F tombera entre G et B.

Cela posé, puisque FC est supposée commensurable avec CD, on aura, par la première partie de la démonstration, AFC:ACD = FC : CD, tandis que (hyp.) ABC : ACD = GC : CD. Or, (FIG. 39) GC : CD > FC : CD; et (FIG. 40) GC : CD < FC : CD. Donc ABC : ACD > AFC : ACD (FIG. 39) et ABC : ACD < AFC : ACD (FIG. 40). Et par conséquent ABC > AFC (FIG. 39) et ABC < AFC (FIG. 40); ce qui est absurde.

CHAPITRE VIII.

Des lignes proportionnelles.

102. THÉORÈME I. *Si dans un triangle quelconque* ACE, (FIG. 41) *les deux côtés* AC, AE, *sont coupés par une ligne* BD *parallèle au troisième, ils le sont en parties proportionnelles, ou bien on a,* AB : BC :: AD : DE; *et réciproquement.*

(*) Quand une ligne ne peut pas être mesurée par une certaine unité, elle contient un nombre de fois juste cette unité, plus une partie de cette unité. On la mesurera donc en lui ajoutant la partie de l'unité qui lui manque, ou en lui retranchant celle qu'elle a de trop. Et comme on peut prendre pour unité une quantité déterminée aussi petite qu'on voudra, pourvu qu'elle soit de même espèce que celle qu'on mesure, *il s'ensuit que pour rendre commensurables deux quantités incommensurables, ce qu'il faut ajouter ou retrancher à l'une d'elles peut diminuer sans fin, et devenir une partie de cette quantité plus petite que toute quantité assignable.*

DÉMONSTRATION. 1.° Tirant les lignes BE, DC, le triangle BDC = BDE (97); et l'on a par conséquent ABD : BDC :: ABD : BDE. Or (101), ABD : BDC :: AB : BC; et ABD : BDE :: AD : DE. Donc AB : BC :: AD : DE.

2.° *Si une ligne* BD *coupe les deux côtés* AC, AE, *d'un triangle en parties proportionnelles, ou bien si l'on a* AB : BC :: AD : DE, *je dis que cette ligne sera parallèle au troisième côté* CE. Car (101) ABD : BDC :: AB : BC; et ABD : BDE :: AD : DE. Donc ABD : BDC :: ABD : BDE; et par conséquent BDC = BDE : d'ailleurs ces triangles ont, par la construction, une base commune BD et leurs sommets du même côté de cette base. Donc (99) ils sont entre deux parallèles BD, CE.

103. COROLLAIRE. On conclura de là que *si l'on partage les deux côtés d'un triangle par plusieurs lignes* BD, FG (FIG. 42), *parallèles au troisième, tous les segments correspondants seront proportionnels entre eux et proportionnels à ces côtés.* Car *alternando*, on a, d'après le théorème précédent, AB : AD :: BF : DG. Donc *componendo* et *alternando*, AB + BF : AD + DG :: BF : DG. Or, AB + BF, ou AF : AD + DG, ou AG :: FC : GE. Donc FC : GE :: BF : DG :: AB : AD :: AC (somme des antécédents) : AE (somme des conséquents).

Ainsi toutes les fois que deux lignes qui font un angle comme AC, AE, sont coupées par des parallèles BD, FG, CE, etc. elles le sont en parties proportionnelles; et réciproquement, si les segments des lignes coupées sont proportionnels, les lignes qui les interceptent sont parallèles. Et si, au lieu de deux lignes concurrentes, on en prenait un nombre quelconque qui, aboutissant au même point A (FIG. 43), fussent coupées par des parallèles BG, *bg*, elles le seraient en parties proportionnelles entre elles et aux lignes entières. Car on aurait A *b* : *b*B :: A *c* : *c*C :: A *d* : *d*D, etc., ou bien A*b* + B*b* : A*c* + C*c* :: *b*B : *c*C, etc.

104. REMARQUES. 1.° Si dans un triangle AH*h* (FIG. 44)

on tire des parallèles D*d*, E*e*, F*f*, G*g*, etc. également distantes entre elles, les segments qu'elles intercepteront sur un côté, savoir, *de*, *ef*, *fg*, *gh*, seront égaux entre eux; ainsi que les segments DE, EF, FG, GH, qui seront formés sur l'autre. Car abaissant du point *d* la perpendiculaire *dp* et du point *e* la perpendiculaire *ep*, on a *dp*=*ep*; puisque les parallèles D*d*, E*e*, F*f* sont également distantes. Donc les triangles *dep*, *efp*, outre qu'ils sont équiangles ont un côté égal; et par conséquent les deux autres côtés le sont aussi. Donc *de*=*ef*=*fg*=*gh*. Or, les segments DE, EF, FG, GH, sont proportionnels à ceux-là. Ils sont donc égaux entre eux.

2.° Si des points D, E, F, G, on tire les droites DL, EM, FN, GO parallèles à A*h*, les quadrilatères D*e*, E*f*, F*g*, etc. seront des parallélogrammes (88), et l'on aura D*d* = L*e*, E*e* = M*f*, F*f* = N*g*. Donc LE, MF, NG, OH, seront les différences respectives de ces parallèles. Or, ces différences sont égales; puisque les triangles DLE, EMF, etc. étant égaux en tout (93), donnent LE = MF = NG, etc. Donc *si dans un triangle on tire des lignes parallèles à un côté, également distantes entre elles, et prolongées jusqu'aux deux autres, elles formeront une progression arithmétique.*

105. THÉORÈME II. *Les triangles équiangles* ABC, BDE, (FIG. 45) *ont leurs côtés homologues proportionnels.*

DÉMONSTRATION. Posez le côté BD sur l'alignement de AB: les deux triangles étant tournés du même côté de AD, prolongez DE et AC, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en F; et alors, puisque (hyp.) l'angle DBE = A, les droites BE, AF, seront parallèles. Donc l'angle BED = F; or, BED = ACB (hyp.); donc F = ACB, et partant la ligne FE sera parallèle à CB, ou bien (85) BEFC sera un parallélogramme. On aura donc par rapport aux parallèles AF, BE (103); AB:BD :: FE ou CB:ED; et par rapport aux parallèles CB, DF, AB:BD :: AC:CF ou BE; et par conséquent AB:BD :: CB:ED :: AC:BE.

106. COROLLAIRE. Il suit de là que *si entre deux lignes qui font un angle* AB, AC (FIG. 44) *on tire des parallèles* D *d*, E *e*, F *f*, *etc. elles seront proportionnelles aux parties* AD, AE, AF, etc. *qu'elles coupent dans les deux lignes* AB, AC. Car les triangles AD *d*, AE *e*, AF *f*, sont équiangles; donc AD:AE :: A *d* : A *e* :: D *d* : E *e*; de même, AE:AF :: A *e* : A *f* :: E *e*: F *f*.

107. THÉORÈME III. *Toute ligne* AD (FIG. 45) *qui divise un angle* A *d'un triangle* BAC *en deux parties égales, coupe le côté opposé* BC *en parties proportionnelles aux côtés adjacents.*

DÉMONSTRATION. Prolongez le côté AC vers E, et du point B tirez BE parallèle à AD : je dis qu'on aura, BD: BA :: DC:AC. Car le triangle ABE est isocèle, puisque l'angle BEA = DAC son correspondant. Or (hyp.), l'angle DAC = DAB, et l'angle DAB = ABE son alterne-interne. Donc BEA = ABE; et par conséquent (81) BA = EA. Or, (103) BD : EA :: DC : AC. Donc BD : BA :: DC : AC.

108. PROBLÈME I. *Diviser une droite donnée* AB (FIG. 47) *en trois parties qui soient entre elles dans le rapport de trois nombres commensurables quelconques, par exemple*, 2, 3, 5.

SOLUTION. Par le point A tirez la ligne indéfinie AX, qui fasse un angle avec AB; et puisque la somme des trois nombres donnés est 10, avec une même ouverture de compas, prenez, en partant du point A, dix parties égales sur AX; de l'extrémité C de la dixième partie, tirez au point B la droite CB; de l'extrémité D du segment AD, qui contient deux de ces parties égales, tirez DG parallèle à BC; de l'extrémité du segment DE, qui en contient trois, tirez EH parallèle à BC. Je dis que AG:GH:HB :: 2:3:5. Car (103) AG:GH:HB :: AD:DE:EC. Or, par la construction, AD : DE : EC :: 2 : 3 : 5. Donc AG : GH : HB :: 2 : 3 : 5.

109. C'est par ce même moyen que l'on peut diviser une ligne quelconque AB (FIG. 48) en un certain nombre de parties égales ; mais il est plus court de procéder ainsi. Sur l'extrémité A, tirez la ligne indéfinie AP ; et par l'extrémité B, tirez la ligne BM parallèle à AP : si vous voulez diviser AB en six parties égales, prenez sur AP cinq parties égales quelconques en partant de A : prenez aussi cinq parties sur BM égales aux précédentes, et qui commencent en B ; alors les lignes MP, MP, seront parallèles (94); et puisque BM = MM, BN = NN : de même, puisque AP = PP, AN = NN; et partant AB est divisée aux points N, N, etc. en six parties egales.

110. PROBLÈME II. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données* A, B, C. (FIG. 49).

SOLUTION. Ayant tiré deux lignes indéfinies AX, AZ, qui se rencontrent au point A, prenez sur AZ la partie AG égale à A et la partie AE égale à B : prenez sur AX, la partie AH égale à C : joignez les points G et H, et tirez par E la ligne EF parallèle à GH ; je dis que AF sera la quatrième proportionnelle cherchée ; puisque l'on a (103) AG:AE :: AH:AF.

COROLLAIRE. *On déduira de là un moyen d'avoir une troisième proportionnelle à deux lignes données.* Car si dans l'exemple précédent, on suppose B = C, on a AE = AH, et la proportion devient ∴ AG : AE : AF.

CHAPITRE IX.

De quelques notions générales sur la similitude des figures, et de leur application aux triangles.

111. DÉFINITION. *Deux figures, ou bien, en général, deux portions d'étendue quelconques, sont semblables lorsqu'elles ne diffèrent entre elles que par leur grandeur.* Ainsi tous les points, toutes les lignes, tous les angles; en un mot, toutes les parties quelconques qui se trouvent dans l'une des figures semblables, doivent se trouver dans l'autre; car si cela n'était pas ainsi, on pourrait, par cette seule différence et sans recourir à l'inégalité de grandeur, distinguer une figure de l'autre; et dès lors, elles ne seraient plus semblables (les lignes ou les parties quelconques de ces figures, qui gardent entre elles les mêmes rapports de grandeur et de situation, seront appelées *homologues*).

112. COROLLAIRE. On conclura de la définition de la similitude, 1.° *que deux lignes droites sont toujours semblables.* Car le nombre et la situation respective des parties étant les mêmes dans chacune, elles ne peuvent différer que par leur grandeur. Et par les raisons contraires, *deux lignes courbes ne sont pas toujours semblables.*

113. 2.° *Que les arcs de cercle qui contiennent le même nombre de degrés, sont semblables.* Car s'ils appartiennent au même cercle, comme AB, BD (FIG. 50), ils n'admettent pas même la différence de grandeur, bien qu'elle ne détruise pas la similitude (111). Ils sont donc alors, non-seulement semblables, mais encore *identiques.* S'ils appartiennent à des cercles différents, comme AD, EF, qui sont supposés concentriques, ils sont chacun en même raison avec leurs circonférences; et de plus, tous les

autres rapports, soit de grandeur, soit de situation, qui se trouvent entre les parties de AD, se retrouvent les mêmes entre les parties homologues de EF. Ces deux arcs sont donc semblables; et l'on voit par les raisons contraires, *que ceux qui ne contiennent pas le même nombre de degrés, sont dissemblables.*

114. 3.° *Que deux angles ne peuvent être semblables, qu'autant qu'ils sont égaux.* Car dans deux angles inégaux ACB, ACD, le côté AC n'est pas situé par rapport à BC dans l'un, ainsi que le même AC l'est par rapport à CD dans l'autre; de plus, les arcs AB, AD, qui les mesurent, ne sauraient être en même raison avec la circonférence, et par conséquent les angles inégaux peuvent être distingués l'un de l'autre, sans recourir à leur grandeur; ou bien (111) ils ne sont jamais semblables. Ce qui prouve (FIG. 51) que *dans deux figures rectilignes semblables* ABDEFG, abdefg, *les angles formés par les lignes homologues, savoir*, A *et* a, B *et* b, D *et* d, ABG, abg, *etc. sont toujours égaux.*

115. Il suit de là *que dans ces mêmes figures les côtés homologues sont proportionnels entre eux et proportionnels aux contours entiers.* Car si l'on applique l'angle *a* sur son égal A, que le côté *ab* tombant sur AB devienne AR, et que *ag* soit AS, alors *bg* se confondra avec RS, et l'on aura l'angle ARS = *abg* = ABG. Donc SR et BG seront parallèles (38); et par conséquent (103) AB:AR ou *ab*:: AG:AS ou *ag*. Si l'on applique ensuite l'angle *b* sur B, et qu'on joigne *d*, *a*, ainsi que D, A; les droites *da*, DA, seront parallèles (*); et l'on aura BA:*ba*:: BD:*bd*: une pareille superposition de l'angle *d* sur D donnerait, BD:*bd*:: DE : *de*. Donc GA : *ga* :: AB : *ab* :: BD : *bd*:: DE : *de*:, etc. Or, (*alg.* 235) AB + BD + DE + etc.:*ab* + *bd*+ *de* + etc. :: AB:*ab*:: BD:*bd*. Donc les contours sont pro-

(*) On n'a pas tracé ces lignes dans la figure pour éviter la confusion.

portionnels aux côtés homologues. Et comme la seule chose qui peut troubler la similitude dans deux polygones de la même espèce, c'est, ou leurs angles ou leurs côtés, on en conclura *que cette similitude aura toujours lieu dans ces sortes de figures, lorsque les angles seront égaux et les côtés homologues proportionnels.*

116. THÉORÈME I. *Les triangles équiangles sont nécessairement semblables.*

DÉMONSTRATION. Ces sortes de triangles ont leurs côtés homologues proportionnels (105); donc ils sont semblables (115).

117. THÉORÈME II. *Les triangles qui ont leurs côtés homologues ou parallèles ou perpendiculaires, sont semblables.*

DÉMONSTRATION. Si les triangles ABC, *abc* (FIG. 52), ont leurs côtés homologues ou parallèles ou perpendiculaires, les angles A, *a*; B, *b*; C, *c*, sont égaux (50); donc les triangles sont équiangles, et par conséquent semblables.

118. THÉORÈME III. *Les triangles* ABC, *abc* (FIG. 53), *qui ont les côtés homologues proportionnels, sont équiangles; et par conséquent semblables.*

DÉMONSTRATION. Sur AB prenez AD = *ab*, et du point D tirez DE parallèle à BC. Les triangles ADE, ABC, sont équiangles.

Donc on a (105) $AB : AD :: \begin{cases} AC : AE \\ BC : DE \end{cases}$

tandis que (hyp.) $AB : ab :: \begin{cases} AC : ac \\ BC : bc \end{cases}$

Or, ici toutes les raisons sont égales haut et bas, puisque (constr.) AD = *ab*. Donc AC:AE :: AC:*ac*, ou bien (*alg.* 210) AE = *ac*: de même BC:DE :: BC:*bc*, ou bien DE = *bc*, et par conséquent le triangle *abc* est égal en tout à ADE (89); lequel étant équiangle et semblable à ABC, l'autre le sera aussi.

119. COROLLAIRE. *Il suffit donc pour déterminer la similitude de deux triangles de savoir, ou que leurs côtés homologues sont proportionnels, ou que les angles opposés à ces côtés sont égaux.*

120. THÉORÈME IV. *Si deux triangles* ABC, abc, *ont deux angles égaux* A *et* a, *et les côtés autour de ces angles proportionnels, ils sont semblables.*

DÉMONSTRATION. Dans AB prenez AD = *ab*, et du point D menez DE parallèle à BC : ce qui donnera (102) AB:AD ou *ab*:: AC:AE. Or (hyp.), AB:*ab*:: AC:*ac*. Donc AE = *ac*; et par conséquent (93) le triangle *abc* est égal en tout à ADE, et puisque (117) celui-ci est semblable à ABC, l'autre le sera aussi.

121. COROLLAIRE. Il suit de là que *si deux lignes* AB, AC (FIG. 44), *qui font un angle en* A, *sont coupées en parties proportionnelles par deux autres lignes* D d, E e, *celles-ci sont parallèles.* Car (hyp.) DE:AD :: *de*:A *d*, donc *componendo*, AE:AD :. A*e*:A*d*; et les triangles AD*d*, AE*e*, outre l'angle commun en A, ont les côtés autour de cet angle proportionnels. Par conséquent, ils sont semblables, et leurs angles correspondants AD *d*, AE *e*, sont égaux (114.) Donc les lignes D *d*, E *e*, sont parallèles.

122. THÉORÈME V. *Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle* BAC (FIG. 54), *on abaisse une perpendiculaire* AD *sur l'hypothénuse* (*), *il se formera deux triangles* CAD, ABD, *semblables au grand* CBA; *et par conséquent semblables entre eux.*

DÉMONSTRATION. Les triangles CBA, CAD, ont un angle commun en C : et de plus un angle droit, l'un en D, l'autre en A. Ils sont donc équiangles, et par conséquent semblables : il en est de même des triangles CBA et ABD, qui,

(*) On appelle *hypothénuse* le côté opposé à l'angle droit dans un triangle rectangle.

outre l'angle commun en B, ont chacun un angle droit, l'un en D, l'autre en A. Donc chaque petit triangle est semblable au grand; et par conséquent ils sont semblables entre eux.

123. COROLLAIRE I. *La perpendiculaire* AD, *abaissée du sommet de l'angle droit, est moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypothénuse.* Car (115), les triangles semblables ACD, ABD donnent, ∴ BD:AD:DC.

124. II. *Chaque côté du triangle rectangle* ABC *est moyen proportionnel entre l'hypothénuse entière et le segment contigu.* Car les triangles semblables ABD, CAD donnent, ∴ BD:AB:BC; et les triangles semblables CAD, CBA, donnent ∴ CD : AC : CB.

125. REMARQUE. Si le triangle ABC était supposé isocèle, et que AD fût une perpendiculaire abaissée de son sommet sur la base BC, elle la partagerait en deux parties égales BD, CD; puisqu'alors les deux triangles ABD, ACD étant égaux en tout (93), donneraient BD = CD.

CHAPITRE X.

De quelques propriétés générales des polygones.

126. DÉFINITIONS. I. *Un polygone est* régulier, *lorsqu'il a tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux; il est* irrégulier, *lorsqu'il y a inégalité ou parmi ses angles ou parmi ses côtés.* Ainsi le quadrilatère ABCD (FIG. 55), dans lequel tous les angles sont droits, et tous les côtés égaux, est régulier, et on l'appelle en particulier *quarré.* Si les quatre côtés étaient égaux, et les seuls angles opposés inégaux, comme dans le quadrilatère EFGH (FIG. 56) le polygone irrégulier serait appelé *rhombe*; tandis qu'il serait appelé *losange*, s'il n'y avait que les côtés opposés, et les angles opposés qui fussent égaux comme dans CDHG. Enfin, si

dans un quadrilatère irrégulier PQSR, il n'y a que deux côtés parallèles PQ, SR, il sera appelé *trapèze*.

II. *Un polygone est* symétrique, *lorsque ses côtés opposés sont égaux et parallèles.* Ainsi le quarré est régulier et symétrique à la fois, le parallélogramme est irrégulier et symétrique.

III. *Dans toute espèce de polygone on appelle angles* saillants *ceux qui ont la pointe tournée en dehors de la figure; et angles* rentrants, *ceux dont la pointe est tournée en dedans.*

127. THÉORÈME I. *Si d'un angle quelconque* A (FIG. 58) *d'un polygone* ABCD, *on tire les droites* AC, AD, *aux autres angles*; 1.° *Le polygone sera partagé en autant de triangles qu'il a de côtés, moins deux*; 2.° *s'il n'a pas d'angles rentrants, les angles de tous ces triangles vaudront en somme les angles du polygone.* (Il suffit, pour la démonstration, de voir la figure).

128. THÉORÈME II. *La somme de tous les angles, dans un polygone qui n'en a pas de rentrants, est* 180°. *multipliés par le nombre des côtés, moins deux.*

DÉMONSTRATION. Car si dans le polygone ABCDE, on mène de A les droites AC, AD, aux autres angles, il se formera autant de triangles qu'il y a de côtés, moins deux; et en outre, tous les angles de ces triangles seront formés des angles du polygone. Or, chaque triangle vaut 180° (76). Donc leur somme vaudra 180°, multipliés par le nombre des côtés du polygone, moins deux.

129. COROLLAIRE I. Appelant s, la somme des angles d'un polygone, et n le nombre de ses côtés, on a donc $s = 180° \times n - 2$. Or, dans tout quadrilatère $n - 2 = 2$; donc $s = 180° \times 2 = 360°$. Dans le pentagone $n - 2 = 3$, donc $s = 180° \times 3 = 540°$. Dans l'exagone, $n - 2 = 4$, donc $s = 720°$, etc.

130. II. Tous les angles étant égaux dans le polygone régulier

régulier, il s'ensuit que la valeur de chacun dans le quadrilatère régulier est $\frac{360°}{4} = 90°$; dans le pentagone $\frac{540°}{5} = 108°$; dans l'exagone $\frac{720°}{6} = 120°$, etc.

131. III. *Dans tout polygone qui n'a pas d'angles rentrants, la somme des suppléments de tous ses angles est* 360°. Car chaque angle saillant avec son supplément, vaut 180°. Donc appelant n le nombre des côtés, la somme des angles et de leurs suppléments sera $180° \times n$; tandis que celle des angles seuls n'est que $180 \times \overline{n - 2}$ (128). Soustrayant cette dernière somme de la première, leur différence, savoir, 360°, donnera la somme des suppléments des angles saillants.

132. THÉORÈME III. *Si dans un polygone symétrique* ACDEFG (FIG. 59), *on joint, par des lignes droites les sommets des angles opposés* A *et* E, B *et* F, D *et* G; 1.° *il se formera autant de triangles qu'il y aura de côtés dans le polygone*; 2.° *ceux qui seront appuyés sur les côtés parallèles, seront égaux.*

DÉMONSTRATION. 1.° La première partie du théorème est évidente à l'inspection de la figure.

2.° Je dis que le triangle BDC = FGC. Car puisque le polygone est symétrique, les côtés opposés BD, GF, sont égaux : d'ailleurs, l'angle BDC = FGC, et l'angle DBC = CFG (38). Donc le triangle BDC = FGC (87). Et comme le même raisonnement peut se faire pour deux triangles quelconques ainsi formés, il s'ensuit que ceux qui sont appuyés sur des côtés parallèles, sont égaux.

133. COROLLAIRE. Il suit de là, 1.° *que dans tout polygone symétrique les droites* DG, BF, AE, *tirées d'un angle à l'angle opposé, se coupent en parties égales*; et par conséquent au même point C, lequel est appelé, pour cette raison le *centre* du polygone.

134. 2.° *Que toute autre ligne, comme* L *l, qui, passant par le centre* C, *se termine aux côtés opposés* AG, DE, *est partagée également en* C. Car les triangles ACL, EC *l*, sont égaux en tout (87). Donc LC = *l* C.

135. 3.° Que si le polygone est symétrique et régulier, toutes les lignes AE, BF, DG, qui joignent les angles opposés, sont égales, ainsi que leurs moitiés CA, CB, CD, CE, etc. et partant les triangles CED, CDB, etc. sont isocèles et égaux en tout. *Donc les perpendiculaires* CP, C p, *abaissées du sommet de ces triangles sur leurs bases, sont égales* (*).

136. 4.° *Que dans tout polygone symétrique les angles opposés quelconques* A et E *sont égaux.* Car, par rapport aux parallèles AG, DE, on a l'angle GAE = AED; et en vertu des parallèles AB, EF, on a l'angle EAB = AEF. Or, l'angle A = GAE + EAB, et l'angle E = AED + AEF. Donc A = E.

137. L'on conclura de là que, puisque un parallélogramme ADBC (FIG. 31) est un polygone symétrique, les angles opposés A et B, D et C, sont égaux; ou bien que la somme de deux angles de suite A + C, vaut celle des deux autres D + B. Or (128), tous ces angles valent en somme 360°. Donc A + C, ou D + B = 180°; c'est-à-dire, que *dans un parallélogramme les angles de suite sont suppléments l'un de l'autre* (26).

138. THÉORÈME IV. *Tout polygone régulier peut être inscrit et circonscrit à un cercle.*

DÉMONSTRATION. 1.° Puisque les lignes *ae, bf, dg* (FIG 60), se coupent au point C en parties égales (132), il s'ensuit que si du centre C et avec une de ces parties C *a*, on décrit une circonférence de cercle, elle passera par les som-

(*) Ces sortes de perpendiculaires sont appelées les *apothèmes* ou les *rayons droits* du polygone; et les droites CA, CB, en sont les *rayons obliques.*

mets de tous les angles a, b, d, etc. du polygone, lequel sera par conséquent inscrit au cercle.

2.° Si du centre C on abaisse sur les côtés du polygone ABDEFG, des perpendiculaires, comme CP, C p, elles seront égales (134). Et par conséquent si du point C, on décrit un cercle avec une de ces perpendiculaires, ces lignes en seront les rayons ; et les côtés du polygone étant perpendiculaires à l'extrémité de ces rayons, seront des tangentes de ce même cercle (58). Donc le polygone sera alors circonscrit au cercle.

139. Corollaire I. Puisque tous les côtés d'un polygone régulier, inscrit dans le cercle, sous-tendent des arcs égaux, on aura la valeur de chacun de ces arcs en divisant 360° par le nombre des côtés du polygone. Ainsi le côté du triangle équilatéral sous-tend le tiers de la circonférence ou 120° : le côté du quarré sous-tend 90° ; et par conséquent *pour inscrire le quarré, il suffit de joindre les extrémités de deux diamètres perpendiculaires l'un à l'autre* ; le côté du pentagone régulier sous-tend un arc de 72° ; le côté de l'exagone, un arc de 60°, etc.

140. II. *Si dans un cercle l'on inscrit un exagone régulier* abdefg, *un de ses côtés vaudra le rayon du cercle.* Car le triangle C e d, est isocèle (134) ; et de plus, l'angle en C vaut 60° (139). Donc chacun des autres angles en e et en d sera aussi de 60° ; et par conséquent le triangle isocèle Ced sera équilatéral, ou bien le côté $ed = Ce$, qui est le rayon du cercle circonscrit.

141. L'on conclura de là que *le périmètre de l'exagone régulier est au diamètre du cercle circonscrit, comme* 3 *est à* 1. Or, la circonférence du cercle est plus grande que le périmètre d'un polygone inscrit. Donc *la circonférence du cercle est au diamètre, dans un rapport plus grand que celui de* 3 *à* 1.

142. Remarque. Cette propriété de l'exagone régulier nous suffit pour diviser en trois parties égales la circon-

férence entière, sa moitié, son quart, et tout autre arc qui sera dans cette progression sous-double. Car portant six fois le rayon du cercle sur la circonférence, on y inscrit d'abord l'exagone régulier, dont la moitié *abde* partage la demi-circonférence en trois arcs égaux. Si l'on joint par des lignes droites les points *a*, *d*, *f*, on inscrit le triangle équilatéral qui partage la circonférence entière en trois parties égales. Si du centre C, on abaisse sur les côtés de l'exagone des perpendiculaires CP, C*p*, etc. On partagera les arcs sous-tendus en deux parties égales. Menant les droites par les points de division P, *d*, *p*, on inscrira un dodécagone régulier; et par conséquent on divisera la circonférence entière en douze arcs égaux, ou bien le quart de cette circonférence en trois parties égales. Par une méthode semblable, on diviserait encore la huitième, la seizième, la trente-deuxième partie de la circonférence en trois arcs égaux; mais la ligne droite et le cercle ne pouvant suffire pour faire une pareille division d'un arc quelconque, on peut dire que *le fameux problème de trisection de l'angle ne saurait être résolu par la géométrie élémentaire.*

143. THÉORÈME V. *En inscrivant dans un cercle des polygones réguliers, dont le nombre des côtés croisse toujours en progression double, on peut rendre la différence du cercle au polygone plus petite que toute quantité assignable.*

DÉMONSTRATION. Pour que cette différence puisse devenir plus petite que toute quantité assignable, il suffit qu'elle diminue plus que de la moitié, chaque fois qu'on doublera le nombre des côtés du polygone régulier inscrit. Or, cela arrivera nécessairement ainsi. Car si CT (FIG. 61), est le rayon droit du polygone, prolongé jusqu'à la circonférence du cercle, et que sur la tangente au point T on prenne QR = AB, le quadrilatère ABRQ sera un parallélogramme (94) plus grand que le segment ATBS. Donc le triangle ATB, moitié de ce parallélogramme (90), sera plus grand que la moitié du segment

ATBS. Or, en doublant le nombre des côtés du polygone inscrit, on ôte de ce segment circulaire le triangle ATB; donc on le diminue de plus que de la moitié; et la même chose arrivant pour tous les segments qui, pris en somme, font la différence du cercle au polygone, on en conclura que cette différence pourra devenir plus petite que toute quantité assignable.

144. Corollaire I. *Le cercle est donc la limite de laquelle s'approchent toujours, sans jamais y atteindre, des polygones réguliers inscrits, dont le nombre des côtés croit en progression double.* Et c'est pour cette raison qu'on *peut considérer le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.* Or (129), dans cette espèce de polygone, appelant s la somme de tous les angles, on a $s = 180^\circ \times (\infty - 2)$, qui revient à cette expression $s = 180^\circ \times \infty$. Donc chacun de ces angles sera $\frac{180^\circ \times \infty}{\infty}$, ou 180°.

145. II. *Tous les cercles sont donc des figures semblables* (115). Ainsi, leurs circonférences, leurs diamètres, leurs rayons, leurs arcs d'un même nombre de degrés, etc. pouvant être regardés comme des lignes homologues de figures semblables, forment des quantités proportionnelles.

CHAPITRE XI.

Dans lequel on expose quelques propriétés du cercle et des lignes droites qui s'y rapportent.

146. Théorème I. *Les parties de deux cordes qui se coupent dans le cercle, sont réciproquement proportionnelles.*

Démonstration. Si par des lignes droites, on joint les points E et C (fig. 62), H et I, le triangle ECD sera semblable au triangle HDI; puisque outre les angles égaux en

D, les angles E et H ont la même mesure, savoir, $\frac{1}{2}$ CGI (68). On aura donc ED:DH :: CD:DI.

147. COROLLAIRE I. Il suit de là *que si une corde* CH *est divisée également par une autre* EI, *sa moitié sera moyenne proportionnelle entre les deux segments ou parties de celle-ci.* Car alors DH = CD ; et la proportion précédente devient ∴ ED:DH:DI. Or, si d'un point quelconque de la circonférence on tire une perpendiculaire sur un diamètre, comme RP sur FG, elle sera la moitié de la corde RS (55); et le diamètre FG pourra être regardé comme une autre corde qui divise la première également au point P. Donc on aura ∴ FP : RP : PG. C'est-à-dire, *qu'une perpendiculaire abaissée de la circonférence du cercle sur un de ses diamètres, est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce diamètre.*

148. Par cette propriété *on peut toujours trouver une moyenne proportionnelle entre les deux lignes données* A *et* B. Car si l'on réunit ces deux lignes en une seule, que je suppose FG : que de son point du milieu B, pris pour centre, on décrive une circonférence avec la moitié FB ; et que du point P, où se réunissent A et B, on élève jusqu'à cette circonférence la perpendiculaire PR, elle sera la moyenne proportionnelle cherchée. Car ∴ FP:PR:PG. Or, par la construction, FP = A, et PG = B. Donc ∴ A:PR:B.

149. THÉORÈME II. *Les cordes de deux arcs* SFR, s f r (FIG. 63), *qui contiennent le même nombre de degrés, sont proportionnelles à ces arcs.*

DÉMONSTRATION. Si, après avoir trouvé les centres B, *b*, de ces deux arcs (63), on tire les rayons qui joignent leurs extrémités, les triangles BSR, *bsr*, seront semblables ; puisque, outre les angles égaux en B et *b*, ils auront les côtés autour de ces angles proportionnels (145). Donc SR : *sr* :: SB:*sb* :: la circonférence décrite avec le rayon SR, est à la circonférenee décrite avec le rayon *sr* :: l'arc

SFR, partie de la première, est à l'arc *sfr*, partie semblable de la seconde.

150. REMARQUE. *Si dans un même cercle on prend des arcs inégaux, les cordes ne seront pas proportionnelles à ces arcs.* Car si les arcs SEF, FGR, sont égaux, l'arc SFR sera double de chacun de ceux-là; tandis que la corde SR est moins que double de SF ou de FR (6); ce qui prouve que *dans le même cercle les cordes varient en plus petite raison que les arcs.* Et c'est pourquoi la corde de 60° étant égale au rayon (140), celle d'un arc double, c'est-à-dire, de 120°, est moindre que le diamètre.

151. THÉORÈME III. *Si on mène deux tangentes* T t, V u (FIG. 64), *au diamètre* FG; *et qu'après l'avoir divisé en un nombre impair de parties égales, on élève par les points de division* P, P, *etc. des cordes perpendiculaires* D d, B b, A a, E e; *je dis que de tous les arcs interceptés entre deux cordes voisines, les plus petits se trouveront entre celles qui, comme* A a, B b, *seront également éloignées du centre* C; *et les plus grands, entre une tangente* T t *ou* V u, *et la corde voisine* D d *ou* E e.

DÉMONSTRATION. 1.° Les arcs BXA, *bxa*, sont les plus petits. Car les cordes A *a*, B *b*, étant également éloignées du centre C, sont égales (54); et par conséquent l'arc BF*b* = AG*a* : d'ailleurs, AXB = *axb* (57); donc BF*a* = BG*a*, ou bien chacun de ces arcs vaut la demi-circonférence; et par conséquent l'angle inscrit BA*a* est droit (68); ou bien la corde BA est perpendiculaire sur les deux parallèles A *a*, B *b*. Mais les autres angles inscrits DB *b*, FD *d*, n'étant pas appuyés sur une demi-circonférence ne peuvent être droits. Donc BA est la seule corde perpendiculaire entre les parallèles également éloignées A *a*, B *b*, D *d*, T *t*; et par conséquent elle est plus courte que toute autre corde BD, DF. Donc l'arc BXA, qu'elle sous-tend, est plus petit que tout autre arc renfermé entre deux de ces parallèles.

2.° L'arc DYF ou son égal EZG, est le plus grand de

tous. Car l'angle FD *d* est plus petit que tout autre angle inscrit B, ou A, puisqu'il est appuyé sur un plus petit arc. Donc DF est la corde la plus oblique, et par conséquent la plus longue qu'il y ait entre les parallèles D *d*, B *b*, A *a*, etc. Donc l'arc DYF qu'elle sous-tend, ou son égal EZG, est le plus grand de tous ceux qui sont interceptés entre ces parallèles.

152. THÉORÈME IV. *Si dans deux cercles concentriques on tire deux parallèles* AB, CD (FIG. 65), *l'arc* BC *du grand cercle renfermé entre ces parallèles, sera d'un moindre nombre de degrés, que l'arc* bc *du petit cercle, renfermé entre ces mêmes parallèles.*

DÉMONSTRATION. Ayant joint les points A et C, tirez par *a* la ligne *ae* parallèle à AC. L'angle BAC a pour mesure $\frac{1}{2}$ BC, et son égal *bae* a pour mesure $\frac{1}{2}$ *be*. Donc il y a autant de degrés et de minutes dans $\frac{1}{2}$ BC, que dans $\frac{1}{2}$ *be*. Et par conséquent il y en a moins dans $\frac{1}{2}$ BC, que dans $\frac{1}{2}$ *bc*; ou dans BC, que dans *bc*.

153. THÉORÈME V. *Si deux sécantes partant d'un même point extérieur* S (FIG. 66) *vont se terminer à la partie concave de la circonférence, elles seront réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures, ou bien on aura* SV : SR :: SP : SO.

DÉMONSTRATION. Si des points d'intersection O et P on mène les cordes OR, PV, on aura les triangles semblables SPV, SOR; parce que outre l'angle commun en S, les angles en R et en V sont appuyés sur le même arc OP. Donc on a SV : SR :: SP : SO.

154. COROLLAIRE I. Si la sécante SR tournant sur le point S s'éloigne du centre, les points d'intersection P et R s'approcheront de plus en plus l'un de l'autre; de façon qu'ils se réduiront au seul point T, lorsque la sécante s'évanouissant deviendra la tangente ST. On aura donc alors, SP = SR = ST. Et la proportion ci-dessus deviendra

$\div$ SV:ST:SO. D'où l'on déduit *que si la tangente et la sécante partent d'un même point hors du cercle, celle-là sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

155. COROLLAIRE II. Si avec le côté CB d'un triangle quelconque ACB, pris pour rayon, on décrit une circonférence de cercle; qu'on prolonge le côté AC jusqu'en D; et si le triangle est obtusangle (FIG. 68), qu'on prolonge le côté AB jusqu'en F, on aura dans tous les cas, AB: AD :: AE:AF. Or, AD = AC + CB, AE = AC — CB; et si CP est une perpendiculaire abaissée de l'angle C sur le côté opposé AB, on aura AF = AP — PB (FIG. 67), et AF = AP + PB (FIG. 68). D'où l'on pourra conclure, *que dans un triangle quelconque un côté* (AB) *est à la somme des deux autres* (AC+CB), *comme leur différence* (AC — CB) *est à la différence ou à la somme des segments* (AP $\mp$ PB), *formés sur ce côté ou sur son prolongement, par la perpendiculaire abaissée de l'angle opposé* (à la différence, si cette perpendiculaire tombe en dedans du triangle (FIG. 67); et à la somme, si cette perpendiculaire tombe en dehors (FIG. 68).

156. PROBLÈME I. *Partager une droite donnée* AB (FIG. 69), *en moyenne et extrême raison* (*).

SOLUTION. Sur l'extrémité A élevez la perpendiculaire AC, qui soit égale à $\frac{1}{2}$ AB; et du point C, avec le rayon CA, décrivez la circonférence AEF; et ayant joint les points C et B, prolongez BC, jusqu'en F : prenez enfin sur AB la partie BD = BE; je dis que la ligne AB sera divisée en moyenne et extrême raison au point D, c'est-à-dire, que l'on aura $\div$ BA : BD : AD.

DÉMONSTRATION. 1.° Par la construction BD = BE et FE = AB, puisque la ligne donnée AB, ainsi que le diamètre FE, sont chacun doubles de CA.

(*) Une quantité est partagée *en moyenne et extrême raison*, lorsqu'on la divise en deux parties, dont la plus grande est moyenne proportionnelle entre la plus petite et la quantité entière.

2.° Par ce que nous avons vu ailleurs (154) BF:BA :: BA:BD. Donc BF — BA:BA — BD :: BA:BD. Or, BF — BA = BE ou BD; BA — BD = AD; donc BD:AD :: BA: BD, ou bien ∴ BA:BD:AD.

157. PROBLÈME II. *Construire un triangle isocèle dont chaque angle à la base, soit double de celui du sommet.*

SOLUTION. Supposez la ligne AB (FIG. 70) divisée au point D en moyenne et extrême raison; de ce point et avec le plus grand segment AD, décrivez un arc de cercle : du point B et d'un rayon BC = AD, décrivez du même côté un arc qui coupera le premier en C : joignez les points A, B, C, et vous aurez le triangle cherché. Car (constr.) DA = DC = BC. Donc le triangle ADC est isocèle; et de plus l'angle extérieur BDC = A + ACD, ou bien BDC = 2 A. Or (120), le triangle BDC est semblable au triangle BCA (puisque l'angle B est commun, et qu'ayant (hyp.) BD:DA :: DA:BA, on aura BD:BC :: BC:BA). Donc le triangle BDC étant isocèle (constr.) BCA le sera aussi; et chaque angle à la base du premier (savoir, B ou BDC valant 2 A) chaque angle à la base du second (savoir B ou C) vaudra aussi 2 A, c'est-à-dire, qu'ils seront chacun doubles de celui du sommet.

158. PROBLÈME III. *Inscrire un décagone régulier dans un cercle.*

SOLUTION. Construisez sur le rayon BA (FIG. 71) de ce cercle un triangle isocèle ABC, qui ait chaque angle à la base double de celui du sommet (157) : portez dix fois la base BC de ce triangle sur la circonférence du cercle, et vous aurez le décagone inscrit. Car alors A = $\frac{1}{10}$ 180°, tandis que B, ainsi que C = $\frac{4}{10}$ 180°. Donc A = 36°; c'est-à-dire, que BC est la corde d'un arc de 36° ou le côté du décagone.

159. COROLLAIRE. *On déduira de là un moyen d'inscrire dans le cercle un pentagone régulier.* Car si on joint par une

ligne droite CE, les extrémités E et C de deux côtés contigus du décagone, cette droite sous-tendra un arc de 72°, et sera par conséquent le côté du pentagone régulier inscrit CEFGH.

160. Remarques. Il faut observer, 1.° *que le pentagone et le triangle équilatéral suffisent pour inscrire dans le cercle le quindécagone régulier.* Car l'arc BHD (fig. 72.) sous-tendu par un côté du triangle equilatéral, vaut $\frac{1}{3}$ ou $\frac{5}{15}$ de la circonférence ; tandis que l'arc BHG sous-tendu par les deux côtés du pentagone vaut $\frac{2}{5}$ ou $\frac{6}{15}$ de la circonférence. Donc l'arc DG vaudra $\frac{1}{15}$; c'est-à-dire, que sa corde sera le côté du quindécagone.

2.° *Qu'on peut diviser géométriquement la circonférence du cercle de trois en trois degrés.* Car en doublant le nombre des côtés (138), on peut avec le quindécagone inscrire un polygone régulier de 120 côtés ; et alors chacun sous-tendra des arcs de trois degrés. On le peut encore en inscrivant dans le même cercle un polygone de 20 côtés et un autre de 24, qui aient le sommet d'un angle au même point B. Car si BD était le côté du premier, et BH celui du second, l'arc BHD serait de 18°, et l'arc BH de 15°. Donc leur différence DH serait de 3°, et la corde de cet arc, portée sur la circonférence, la diviserait en 120 arcs de trois degrés chacun.

SECTION II.

Des Surfaces.

CHAPITRE PREMIER.

Des rapports et de la mesure des surfaces planes.

161. Nous avons dit plus haut (3) que l'étendue considérée avec deux dimensions seulement, est ce qu'on désigne en géométrie par le mot de *surface*; et qu'alors une de ces dimensions est appelée sa *longueur*, et l'autre sa *largeur*.

Les surfaces sont *planes* ou *courbes*. On appelle *planes* celles sur lesquelles une ligne droite peut s'appliquer en tous sens, en se confondant avec elles; et *courbes*, celles où l'on ne peut point faire une semblable application.

162. Mesurer une quantité, c'est déterminer combien de fois elle en contient une autre, qui, pour cette raison, est appelée sa *mesure* ou son *unité*. Cette unité doit être de la même espèce que la quantité mesurée, puisqu'entre des quantités hétérogènes, on ne peut concevoir aucun rapport de grandeur. Ainsi une surface ne saurait être mesurée que par une surface. Mais comme, parmi les différentes espèces de figures superficielles qui pourraient servir à cet objet, la plus propre est celle qui a ses angles droits et sa hauteur égale à sa base; on a pris le quarré de préférence à toute autre figure, pour mesurer les surfaces (*). C'est pourquoi *quarrer* une surface

(*) Alors on n'a employé qu'une seule *unité linéaire*, pour déterminer la base et la hauteur de la surface à mesurer, et cette

ne désigne autre chose que la mesurer ; ou bien déterminer combien de fois elle contient un quarré d'une grandeur donnée, lequel est appelé *mètre quarré*, *toise quarrée*, *etc.* suivant que la longueur d'un de ses côtés est d'un *mètre courant*, d'une *toise courante*, etc.

163. Théorème I. *Les surfaces de deux triangles (et par conséquent celles de deux parallélogrammes) qui ont des bases égales, sont entre elles comme leurs hauteurs.*

Démonstration. Soient les deux triangles ABC, DEF (fig. 73) dont les bases BC, EF sont égales, et les hauteurs AH, DI, inégales : soit CG = BH et FK = EI. Alors on aura GH = KI, et comme ces lignes peuvent être prises pour les hauteurs des triangles AGH, DKI, on aura (101), AGH : DKI :: AH : DI. Or (98), AGH = ABC, et DKI = DEF ; donc ABC : DEF :: AH : DI.

164. Théorème II. *Si les bases de deux parallélogrammes* S, s, *sont entre elles comme les nombres* B, b, *: leurs hauteurs comme les nombres* H, h, ; *et que les unes et les autres varient à la fois, on aura*, S : s :: B × H : b × h.

Démonstration. Si les bases seules étaient différentes, on aurait (101), S : *s* :: B : *b* ; et si c'était les hauteurs, il viendrait (162), S : *s* :: H : *h*. Donc (*Alg.* 241) les unes et les autres variant à la fois, on aura, S : *s* :: B × H : *b* × *h*.

165. Corollaire. Il suit de là que si le parallélogramme *s* est un quarré, et qu'on le prenne pour unité de surface ; tandis que sa base ou sa hauteur servent d'unité de longueur, pour mesurer la base et la hauteur de S ; on aura, S : *s* :: B × H : 1. C'est-à-dire que *exprimant le rapport de la base et de la hauteur de* S *par celui des deux nombres* B, H, *qui ont la base ou la hauteur de* s *pour*

---

unité est le côté du quarré. Si l'on eût pris un parallélogramme, n'ayant pas la base égale à la hauteur, il eût fallu mesurer les hauteurs des surfaces par une ligne, et les bases par une autre.

unité, on sera assuré que le parallélogramme S *contient autant de fois sa mesure* s, *que le produit* B × H *contient d'unités.* Ce qui s'exprime en disant *que la surface d'un parallélogramme est égale au produit de sa base multipliée par sa hauteur* (*).

166. SCOLIE. Pour rendre cette vérité plus manifeste, supposons que le quarré *ac* (FIG. 74) doive servir d'unité, pour mesurer le rectangle AC. Suivant ce que nous avons dit, on doit d'abord chercher le nombre B, qui exprime combien de fois la base AB contient son unité *ab*, et je le suppose ici 4 : ensuite le nombre H, qui exprime combien de fois la hauteur AD contient la hauteur *ad*, ou son égale *ab*; je suppose que ce nombre soit 3; et alors 4 × 3 ou bien 12, exprimera combien de fois AC contient l'unité de surface *ac*. En effet, si on prend sur AB quatre parties égales à *ab*, et trois sur AD; et que par les points de division E, F, G, H et I, on élève des perpendiculaires E*e*, F*f*, G*g*, H*h*, I*i*, on formera dans le rectangle AC douze quarrés, dont chacun sera égal à *ac*.

167. COROLLAIRE. *Pour avoir la surface d'un triangle quelconque, il faut donc prendre la moitié du produit de sa base multipliée par sa hauteur*; puisqu'il est toujours la moitié d'un parallélogramme de base égale et de hauteur égale (90).

168. THÉORÈME. III. *La surface d'un trapèze* PQRS (FIG. 57) *doit être exprimée par le produit de la perpendiculaire* PH, *tirée entre les côtés parallèles* PQ, SR, *multipliée, ou par la demi-somme de ces côtés, ou par la ligne* MN, *tirée du milieu de* PS, *parallèlement à* PQ.

(*) On voit assez que cette proposition, prise dans le sens littéral, est absurde; car il est impossible (*arith.* 20), et de multiplier une ligne par une ligne, et d'avoir une surface pour produit. Ainsi on doit chercher le vrai sens de cet énoncé dans ce qui le précède, et le regarder comme une expression abrégée, qu'on n'emploie ici que pour éviter une trop longue circonlocution.

DÉMONSTRATION. 1.° Le triangle PSR $=$ PH $\times \frac{1}{2}$ SR, et le triangle PQR $=$ PH $\times \frac{1}{2}$ PQ. Donc la surface du trapèze, ou bien la somme de ces deux triangles sera PH $\times \frac{SR+PQ}{2}$.

2.° Le trapèze pouvant être pris pour un triangle tronqué, dans lequel les parallèles PQ, MN, SR, sont à égales distances, on a (104), $\div$ SR. MN. PQ. Donc, MN $= \frac{SR+PQ}{2}$. Et par conséquent la surface du trapèze pourra encore être exprimée par PH $\times$ MN.

169. THÉORÈME IV. *La surface d'un polygone régulier* ABDEFG (FIG. 60) *est exprimée par la moitié du produit de son contour multiplié par son apothème.*

DÉMONSTRATION. Si on joint les sommets des angles opposés du polygone par les droites AE, BF, DG, on le partagera en triangles isocèles ACB, BCD, etc. qui ont tous la même hauteur, savoir, l'apothème; et dont les bases forment le contour entier du polygone. Donc désignant l'apothème par p, on a, ACB $= \frac{1}{2}p \times$ AB; BCD $= \frac{1}{2}p \times$ BD; DCE $= \frac{1}{2}p \times$ DE, etc. Donc la somme de tous les triangles ou la surface entière du polygone $= \frac{1}{2}p$ (AB + BD + DE + EF + FG + GA).

170. COROLLAIRE I. Puisque le cercle peut être considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés (144), et que, sous ce rapport, il a le rayon pour apothème; il s'ensuit que *sa surface est égale au produit du rayon, multiplié par la demi-circonférence;* ou bien, *à celle d'un quarré, dont le côté serait moyen proportionnel entre le rayon et la demi-circonférence;* ou bien encore, *à celle d'un triangle qui aurait le rayon pour hauteur, et la circonférence pour base.*

171. COROLLAIRE II. La surface d'un secteur de polygone régulier qui ne contient que des triangles entiers, comme ABDC (et par conséquent celle d'un secteur cir-

culaire) est égale *à la moitié du produit de l'apothème multiplié par la partie du contour qui termine ce secteur.* D'où il suit que pour avoir la surface du segment circulaire *bpd*, il suffirait de retrancher de celle du secteur *cbpd* la surface triangulaire *cbd*.

172. Scolie. I. Si le polygone dont on cherche la surface n'est point régulier, il faut le partager en triangles, et prenant ensuite la surface de chacun en particulier, la somme de ces surfaces donnera celle du polygone entier.

173. Scolie II. D'après tout ce que nous avons dit jusqu'ici, on voit que le fameux problème de la quadrature du cercle consiste à trouver exactement la surface de cette figure, ou bien à faire voir qu'elle ne peut point être trouvée, car l'une et l'autre de ces deux manières résoudrait également la question. Et comme cette surface serait connue (169), si l'on trouvait le rapport exact de la circonférence à une ligne droite donnée, c'est à la recherche de ce rapport que les géomètres se sont attachés. Certains ont prétendu que sa valeur est inassignable, et qu'ainsi la quadrature du cercle est impossible; d'autres, au contraire, ont cru ce rapport assignable, et ont fixé des limites plus ou moins approchées, entre lesquelles il se trouve. Ainsi Archimède a fait voir que le diamètre étant 7, la circonférence est entre 21 et 22, mais plus près de 22 que de 21. Adrien Metius a donné un rapport plus approché, en disant que le diamètre étant 113, la circonférence est entre 354 et 355, mais plus près de ce dernier nombre que de l'autre. Ludolphe en a approché jusqu'à la 35.me décimale. M. de Lagny a encore porté cette approximation plus loin dans les Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, de l'année 1719, en disant que le diamètre étant 1, la circonférence sera exprimée par 3, 141592 etc. jusqu'à 127 caractères décimaux; de façon qu'il ne s'en faudra pas d'une unité décimale du 127.me rang qu'on n'ait par là la véritable

table valeur de la circonférence. Enfin plusieurs grands géomètres (et c'est à ceux-là qu'il appartient seulement d'ajouter à ce qui a été fait, de connaître même ce qui reste à faire pour la solution de la question présente), ont trouvé diverses approximations, parmi lesquelles nous nous bornons à rapporter la suivante, dont l'invention est attribuée à Leybnitz, quoique d'autres l'aient réclamée dans le temps; savoir, que le rayon étant supposé 1, l'arc de 45.° sera $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$, etc..... ainsi à l'infini, approchant toujours de sa valeur véritable, alternativement en dessus et en dessous. Or, dans cette hypothèse, le quarré construit sur le rayon est 1×1, et la surface du quart de cercle (170) est $1 \times 45.°$. Donc la première surface est à la seconde :: $1 : 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$, etc.

174. THÉORÈME V. *Dans tout triangle rectangle* ABC (FIG. 75), *le quarré* BG, *construit sur l'hypothénuse, est égal à la somme des quarrés* AD + AE, *construits sur les deux côtés* (*).

DÉMONSTRATION. Par le point A, tirez la ligne AH parallèle à CG, et joignez les points A et G, A et F; joignez encore les points D et B, C et E. Cela posé, le triangle DCB = ACG (93); car l'angle en C est égal dans chacun; puisque outre un angle droit, il contient la partie commune ACB, et de plus les côtés autour de cet angle, savoir DC et AC, CB et CG sont égaux. Or, le triangle DCB est la moitié du quarré DA, et le triangle ACG est la moitié du parallélogramme CH (90). Donc le quarré DA = CH: et, par un raisonnement semblable, on prouvera que AE = PF, ou bien que DA + AE = CF.

175. COROLLAIRE. Il suit de là que si on donne en nombres le quarré de l'hypothénuse $= c^2$, et le quarré d'un côté $= b^2$, désignant le nombre qui exprime l'autre côté par a, on aurait $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Et connaissant en nombres

(*) Ce théorème important est appelé le théorème de Pythagore, parce que ce philosophe en est l'inventeur.

les quarrés des deux côtés a^2, b^2, pour trouver l'expression numérique de l'hypothénuse c, on aurait $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Donc si les deux côtés sont égaux, ou bien si $a=b$, il viendra en substituant a pour b, $c=\sqrt{2aa}=a\sqrt{2}$, c'est-à-dire, qu'alors le nombre qui exprime l'hypothénuse est *incommensurable* avec a ou b. Or, dans ce cas, le triangle rectangle est la moitié d'un quarré, et l'hypothénuse en est la diagonale. Donc *le nombre qui exprime le côté d'un quarré est toujours incommensurable avec celui qui en exprime la diagonale.*

176. THÉORÈME. VI. *Deux surfaces quelconques* S, s, *sont entre elles, comme les produits des nombres dont les rapports expriment ceux de leurs éléments linéaires.*

DÉMONSTRATION. Supposons que u soit l'unité de surface, et que ses éléments linéaires soient l'unité de longueur; tandis que le rapport des deux nombres B et A, exprime celui des éléments linéaires de S, et que le rapport des deux nombres b, h, exprime celui des éléments de s; ce qui donnera . . . $\left\{\begin{matrix} S : u :: BH : 1 \\ u : s :: 1 : bh \end{matrix}\right\}$ d'où l'on conclura, *ex æqualitate ordinata*, que $S : s :: BH : bh$.

177. COROLLAIRE I. Il suit de là que *si deux surfaces sont égales, leurs éléments linéaires sont en raison réciproque.* Car si $S=s$, $BH=bh$. Donc $B : b :: h : H$. (On voit évidemment que l'inverse est encore vraie, c'est-à-dire, que si $B : b :: h : H$., on a $S=s$, puisque alors $BH=bh$). Or, les éléments linéaires qui déterminent la surface d'un triangle ou d'un parallélogramme sont la base et la hauteur (164). Donc *deux triangles ou deux parallélogrammes égaux ont leurs bases en raison inverse de leurs hauteurs, et réciproquement.*

178. COROLLAIRE II. Lorsque deux figures S, s, sont semblables, toutes leurs dimensions homologues sont proportionnelles (115). Donc $B : b :: H : h ::$ une dimen-

sion quelconque de la première, est à une dimension homologue de la seconde. Et par conséquent (*Alg.* 220) la proportion $S : s :: BH : bh$, devient $S : s :: B^2 : b^2 :: H^2 : h^2$. C'est-à-dire, que *deux figures semblables sont entre elles, comme les quarrés des nombres, qui expriment leurs dimensions homologues quelconques.*

179. Il suit de là que si sur les trois côtés d'un triangle rectangle ABC (FIG. 76) on construit trois polygones semblables, de telle manière que les lignes AC, CB, BA, en soient des dimensions homologues, la surface S de celui qui sera construit sur l'hypothénuse vaudra la somme des surfaces P+Q des deux autres. Car désignant l'hypothénuse par le nombre A, un côté par le nombre B, et l'autre par le nombre C, on aura (177) . . . . $\left\{\begin{array}{l} S:P :: A^2:B^2 \\ S:Q :: A^2:C^2 \end{array}\right\}$

Donc (*Alg.* 236) $2S : P + Q :: 2A^2 : B^2 + C^2$.

Ou bien . . . $S : P + Q :: A^2 : B^2 + C^2$.

Or (173), $A^2 = B^2 + C^2$. Donc $S = P + Q$.

180. On peut déduire de là la quadrature des espaces circulaires, connus sous le nom de *Lunulles d'Hypocrate* (*). Car si sur les trois côtés d'un triangle rectangle ABC (FIG. 77) pris pour diamètres, on décrit trois demi-cercles ALB, AEC, CDB, la surface de celui qui sera décrit sur l'hypothénuse vaudra la somme des surfaces des deux autres (178). Donc ce qui ne sera pas commun de part et d'autre sera égal; ou bien on aura AECM + CDBL = ACB, c'est-à-dire que *la surface des deux lunulles circulaires sera égale à celle du triangle rectangle, sur lequel elles sont construites.*

181. THÉORÈME VII. *Dans un triangle rectangle* ABD (FIG. 78), *le quarré formé sur l'hypothénuse* (*lequel est désigné par* AD^2) *est aux quarrés* AB^2, BD^2, *formés sur les côtés,*

(*) Hypocrate était un géomètre grec, connu par cette découverte.

comme l'hypothénuse est à chacun de ses segments AP, PD, *formés par une perpendiculaire* BP, *abaissée du sommet de l'angle droit.*

DÉMONSTRATION. Les triangles ABD, ABP, BPD, sont semblables; donc ils sont comme les quarrés AD^2, AB^2, BD^2 : d'ailleurs, ces triangles ont une même hauteur BP, donc ils sont comme leurs bases AD, AP, PD. Donc $AD^2 : AB^2 : BD^2 :: AD : AP : PD$.

182. COROLLAIRE. L'on conclura de là que les quarrés construits sur deux cordes AB, AC, menées de l'extrémité d'un diamètre AD, sont entre eux comme les portions correspondantes du diamètre, savoir AP, AQ, interceptées entre le point A et les perpendiculaires BP, CQ, abaissées de l'autre extrémité de ces cordes sur le diamètre. Car les triangles ABD, ACD, étant rectangles (68), on a

(180) . . . . . $\begin{cases} AB^2 : AD^2 :: AP : AD \\ AD^2 : AC^2 :: AD : AQ \end{cases}$

Donc (*ex æqualitate ordinata*). . . $\{ AB^2 : AC^2 :: AP : AQ$

183. PROBLÈME I. *Réduire une figure rectiligne quelconque* ABCDE (FIG. 79), *a une autre d'égale surface, et qui ait un angle de moins.*

SOLUTION. Supposons qu'on veuille ôter l'angle C: pour cela, tirez par les extrémités de ses côtés la droite DB; par le point C menez-lui la parallèle CF, jusqu'à la rencontre en F du côté AB prolongé, et tirez la droite DF. Je dis que le quadrilatère AFDE = le pentagone ABCDE. Car le triangle BGF qu'on a ajouté, est égal au triangle DGC qu'on a retranché; puisque les triangles BDF, BDC, étant égaux (97), ce qu'ils n'ont pas de commun, savoir BGF, DGC, sera égal de part et d'autre.

On peut, par ce moyen, réduire un polygone irrégulier quelconque à un triangle et en mesurer ainsi la surface.

184. PROBLÈME II. *Construire un quarré égal à deux ou à plusieurs autres quarrés donnés.*

SOLUTION. Joignez les deux côtés, AB, BC (FIG. 80) des deux quarrés donnés, de façon qu'ils fassent un angle droit en B; et le quarré construit sur l'hypothénuse AC vaudra la somme des quarrés construits sur AB et sur BC (173). Si on voulait un quarré qui en contînt un de plus, on éleverait sur l'extrémité de l'hypothénuse AC, la perpendiculaire CD égale au côté de ce troisième, et le quarré construit sur AD vaudrait les trois quarrés donnés : on procéderait de même pour y ajouter le quarré construit sur DE; de sorte que le quarré construit sur l'hypothénuse AE vaudrait la somme des quatre précédents.

CHAPITRE II.

Des surfaces planes, considérées par rapport à leurs positions respectives.

185. UNE surface plane ou un *plan* peut avoir, relativement à d'autres plans, ou relativement à des lignes droites, tous les rapports de situation que ces dernières admettent entre elles; et ces rapports peuvent être définis, ainsi qu'ils l'ont déja été en parlant des lignes. Ainsi un plan est *perpendiculaire* à un autre, lorsqu'il ne penche d'aucun côté sur celui-ci, ou bien lorsqu'il fait avec lui un ou deux angles droits : il lui est *oblique*, lorsqu'il penche plus d'un d'un côté que de l'autre; et enfin deux plans sont *parallèles*, lorsqu'ils ne se rencontrent ni ne peuvent se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge; ou bien encore lorsque sur l'un des plans, on peut tirer en plus d'un sens (et par conséquent en tout sens) des droites parallèles à d'autres droites, prises sur l'autre plan.

Il y a deux différentes manières de concevoir la *formation* d'un plan, ou bien en se représentant qu'une ligne droite BC (FIG. 85), se meut le long de BA, restant toujours parallèle à elle-même; ou bien que BC (FIG. 84)

tourne sur le point B, faisant toujours un angle droit avec AB. Dans ces deux cas, l'espace parcouru par la droite BC sera évidemment un plan ; mais s'il est formé par la révolution d'une droite, ce plan sera terminé par une ligne circulaire (12).

186. THÉORÈME I. *Une ligne droite qui a deux points* C *et* D *dans un plan* AB (FIG. 81) *est tout entière dans ce plan.*

DÉMONSTRATION. Car sur le plan AB prolongeons la partie CD de la droite en question jusqu'en E, et supposons qu'il y ait, s'il se peut, une autre partie DF de cette droite dans un plan supérieur ou inférieur au plan AB. Alors la prétendue droite CDF aura plus d'un point commun avec la droite CE, sans se confondre avec elle, ce qui est absurde (8).

187. THÉORÈME II. *Un triangle* ABC (FIG. 82) *est tout entier dans un même plan.*

DÉMONSTRATION. Car si une partie ADEB était dans un plan et l'autre partie DEC dans un autre, la droite AC aurait la partie AD dans le premier plan, et la partie DC dans le second, ce qui est absurde (185).

188. THÉORÈME III. *La section commune de deux plans* AB, DC (FIG. 83) *est une ligne droite.*

DÉMONSTRATION. 1.° Cette section EF est une ligne. Car autrement elle aurait une largeur, et par conséquent un des deux plans aurait une épaisseur, ce qui est absurde (3).

2.° Elle est une ligne droite : et si cela n'était pas ainsi, par les points E et F communs aux deux plans, on pourrait tirer sur l'un la droite EHF, et sur l'autre la droite EGF ; et alors ces droites auraient deux points communs, savoir, E et F, sans se confondre, ce qui est encore absurde (8).

189. THÉORÈME IV. *Deux ou plusieurs plans se confondent lorsqu'ils ont trois points communs, pourvu que ces points ne soient pas en ligne droite.*

DÉMONSTRATION. Car si les trois angles d'un triangle aboutissent à ces trois points, les plans en question renfermeront chacun ce triangle ; or (186), un triangle est tout entier dans le même plan ; donc ces plans se confondront en un seul.

190. COROLLAIRE. Il suit de là, 1.° que trois points qui ne sont pas en ligne droite, déterminent la position d'un plan ; 2.° que deux lignes qui se rencontrent, peuvent toujours être mises sur le même plan ; 3.° qu'un point fixe et une ligne déterminée, peuvent toujours être mis sur un même plan.

191. THÉORÈME V. *Si une ligne* AB (FIG. 84), *est perpendiculaire à la fois aux deux lignes* BC *et* BD, *qui se coupent, elle le sera au plan de ces deux lignes.*

DÉMONSTRATION. Concevez que la ligne BC restant toujours perpendiculaire à AB tourne sur le point B ; alors elle se confondra toujours successivement avec BD et avec toutes les perpendiculaires à AB, qu'on peut mener autour du point B, telles que BE, BF, etc. ou bien toutes ces perpendiculaires seront sur le plan tracé par BC. Donc, puisque AB ne penche d'aucun côté par rapport à ces lignes (41) elle ne penchera point par rapport à leur plan ; ou bien elle sera perpendiculaire à ce plan. Or, celui-ci ayant ses trois points B, C, D, communs avec le plan qui contient les deux lignes BC, BD, se confondra avec lui (188). Donc AB sera perpendiculaire au plan de ces deux lignes.

192. REMARQUE. On pourra, par un raisonnement semblable, prouver l'inverse de cette proposition, savoir, que *si une ligne* AB *est perpendiculaire a un plan, elle le sera à toutes les lignes* BC, BD, BE, *etc. qui, placées sur ce plan, viennent aboutir au pied de cette perpendiculaire.*

193. THÉORÈME VI. *Si la ligne* AB (FIG. 85), *est l'intersection commune de deux plans* BEFA, BCDA, *et que sur le point* P *de cette ligne on élève deux perpendiculaires* PR, PQ, *chacune sur un de ces deux plans, l'arc* RQ, *qui mesurera l'angle* RPQ, *formé par ces perpendiculaires, mesurera aussi l'angle formé par ces plans.*

DÉMONSTRATION. Concevez d'abord qu'un de ces plans soit couché sur l'autre, et qu'ainsi la ligne PR soit couchée sur PQ; qu'ensuite, l'un des deux étant immobile, l'autre fasse une révolution entière sur la section commune AB, et qu'ainsi le point R décrive une circonférence autour du point P. Alors une partie quelconque de la révolution de ce plan sera à la révolution entière, comme l'arc QR, décrit dans cette partie de révolution, sera à sa circonférence. Donc l'arc QR, par son rapport à sa circonférence, exprimera combien vaut une partie de la révolution de ce plan, par rapport à la révolution entière, ou, ce qui est la même chose, il déterminera la valeur de l'angle. Il en est donc la mesure, dans le même sens que nous avons pris ailleurs un pareil arc pour la mesure de l'angle *linéaire.*

194. THÉORÈME VII. *Si une ligne* P p (FIG. 86) *est perpendiculaire au plan* AB, *tous les plans qui la renferment, tels que* CD, EF, *etc. seront perpendiculaires au même plan* AB.

DÉMONSTRATION. Si sur le plan AB et du point *p* on mène la ligne *p*R perpendiculaire à la section E*e*, et la ligne *p*S perpendiculaire à la section C*c*, elles seront l'une et l'autre perpendiculaires à P*p* (191); donc les angles P*p*R, P*p*S, seront droits; or, le premier mesure l'inclinaison du plan EF sur AB, et le second celle du plan CD sur AB (192). Donc ces deux plans sont perpendiculaires sur AB (184), et il en serait de même de tous ceux qui renfermeraient la ligne P*p*.

195. RÉCIPROQUEMENT. *Si deux plans* CD, EF, *sont per-*

pendiculaires à un troisième AB, *leur intersection* P p *sera une ligne perpendiculaire à ce troisième.* Car tirant sur ce plan AB et du même point les droites *p* R, *p* S, les angles P *p* R, P *p* S, seront droits, parce qu'ils mesureront l'inclinaison de ces plans sur le plan AB (192). Donc P *p* est perpendiculaire sur les lignes *p* R, *p* S, et par conséquent (190) elle l'est sur le plan de ces deux lignes, lequel est AB.

196. THÉORÈME VIII. *Si deux plans parallèles* AC, ac, *sont coupés par un troisième* E f (FIG. 89), *leurs intersections* EF, ef, *seront deux lignes parallèles.*

DÉMONSTRATION. Car si ces deux lignes n'étaient pas parallèles, en les mettant sur le même plan E *f*, elles pourraient se rencontrer ; et par conséquent les deux plans AC, *ac*, se rencontreraient aussi. Ils ne seraient donc pas parallèles (184) ; ce qui est contre la supposition.

197. REMARQUE. On voit assez par ce que nous avons dit ailleurs sur les lignes droites (38), que si deux plans parallèles sont coupés par un troisième, les angles correspondants seront égaux entre eux, ainsi que les alternes-internes et les alternes-externes ; et réciproquement.

198. THÉORÈME IX. *Si d'un même point* P (FIG. 88) *pris hors de deux plans parallèles* AB, ab, *on mène les droites* PR, PS, PT, PV, *à travers ces plans, elles dessineront sur chacun des figures semblables* RT, rt.

DÉMONSTRATION. Si l'on conçoit un plan qui passe par les trois points R, S, P, il formera sur les plans AB, *ab*, les deux intersections parallèles RS, *rs* (195), (par un semblable moyen on trouverait que ST et *st*, TV et *tu*, VR et *ur*, TR et *tr* sont parallèles) : on aura donc cette suite de raisons égales (106), RS : *rs* :: ST : *st* :: TR : *tr* ; et par conséquent les deux triangles RST, *rst*, ayant leurs côtés proportionnels, seront semblables (118). Donc l'angle S = *s* et de plus tous les côtés autour de ces angles

seront proportionnels. Comme on peut faire le même raisonnement pour les angles T et *t*, V et *u*, R et *r*, on en conclura que les deux quadrilatères RT, *rt*, ont leurs angles homologues égaux, et leurs côtés homologues proportionnels ; et qu'ainsi ils sont semblables.

199. COROLLAIRE I. Si du point P on tire la ligne PQ perpendiculaire aux deux plans, on aura toujours PQ : P*q* :: PT : P*t* :: TV : *tu*. Or (177), VRST : *urst* :: TV² : *tu*². Donc VRST : *urst* :: PQ² : P*q*² ; c'est-à-dire, que *les surfaces de ces deux figures sont comme les quarrés de leurs distances au point* P. Or, les deux plans AB, *ab*, étant supposés immobiles, les quarrés de ces distances sont dans une raison constante ; *donc quelles que soient les figures dessinées sur ces plans parallèles et immobiles, par les mêmes droites qui partent d'un point fixe* P, *leurs surfaces sont toujours dans le même rapport.*

200. COROLLAIRE II. *Deux angles* TVR, tur, *qui ne sont pas sur le même plan, sont égaux, pourvu qu'ils aient leurs côtés homologues parallèles.* Car ils peuvent être mis sur deux plans parallèles et devenir les angles homologues de deux figures semblables (197).

201. PROBLÈME I. *D'un point* P (FIG. 89) *pris hors d'un plan* AB, *abaisser une perpendiculaire à ce plan.*

SOLUTION. Tirez d'abord dans le plan AB la ligne indéfinie R*r*, et dans un plan qui passe par P et par R*r*, abaissez du point P la ligne PO perpendiculaire à R*r* (64) : du point O, tirez dans le plan AB la ligne *p*O perpendiculaire à R*r* : joignez sur un même plan le point P et la ligne *p*O, et enfin du point P abaissez P*p* perpendiculaire sur *p*O ; je dis que cette ligne sera la perpendiculaire cherchée.

Car si par le point *p* on mène sur le plan AB, la ligne *p*Q parallèle à R*r*, elle est perpendiculaire au plan P*p*O, puisque sa parallèle R*r* est perpendiculaire à ce plan (190).

Donc Q*p* et O*p*, seront perpendiculaires à P*p*; ou bien P*p* sera perpendiculaire au plan des lignes Q*p*, O*p* (190); donc P*p* tombera du point P perpendiculairement sur le plan AB.

202. PROBLÈME II. *Sur un point* d, *pris dans le plan* BC (FIG. 90), *élever une perpendiculaire à ce plan.*

SOLUTION. D'un point quelconque E, pris hors de ce plan, abaissez la perpendiculaire E*e*, et après avoir mis sur un même plan le point *d* et la perpendiculaire E*e*, tirez à celle-ci une parallèle qui passe par le point *d* (92), et cette ligne *d*D sera la perpendiculaire cherchée.

203. PROBLÈME III. *Par un point* P (FIG. 86) *mener des plans perpendiculaires au plan* AB.

SOLUTION. Abaissez de ce point sur le plan AB, la perpendiculaire P*p*, et tous les plans qui la renfermeront, seront perpendiculaires au plan AB(293).

204. REMARQUE. On voit par cette opération, que par un point fixe, on peut mener une infinité de plans perpendiculaires à un autre plan; mais que de ce point on ne peut abaisser qu'une seule ligne perpendiculaire au même plan.

SECTION III.

Des Solides.

CHAPITRE PREMIER.

Notions générales sur les Solides et propriétés particulières du Prisme.

205. DÉFINITIONS I. Nous avons déja dit (2) que par *solide* ou *volume*, on entend en géométrie, l'étendue considérée avec ses trois dimensions, *longueur*, *largeur* et *profondeur*. De façon qu'une figure solide ne sera autre chose qu'un espace terminé en tout sens; ou bien une étendue dans laquelle les trois dimensions seront limitées. Or, les limites qui terminent une étendue de tout côté, ne peuvent être que des surfaces; et c'est d'après le nombre et l'espèce de ces surfaces que le solide prend différents noms.

On lui donne, en général, celui de *polyèdre*, quand il n'est terminé que par des surfaces planes, ou bien des plans. S'il n'a que quatre faces ou quatre plans qui le terminent (et il ne saurait en avoir moins), on l'appelle *tétraèdre*; de façon que le tétraèdre est le plus simple de tous les solides. S'il est terminé par 5, 6, 7, 8, etc. plans, on l'appelle *pentaèdre*, *exaèdre*, *eptaèdre*, *octaèdre*, etc.

206. II. Un polyèdre est *régulier*, lorsque les plans qui le terminent sont des polygones *réguliers*, *égaux et semblables*; et si une de ces conditions manque, il est *irrégulier*.

207. III. Deux solides sont *semblables* lorsqu'ils sont terminés par un égal nombre de plans semblables.

208. IV. Le *prisme* (FIG. 99) est un polyèdre terminé par des plans disposés de manière que les deux opposés, comme ABCDE, FGHIK, sont des polygones égaux, semblables et parallèles ; et que tous les autres, comme ABGF, BCHG, etc. sont des parallélogrammes.

209. V. Les *bases* du prisme sont les deux faces opposées et parallèles, ABCDE, FGHIK, que nous avons dit être toujours égales et semblables. Les *arêtes* sont les droites parallèles et égales, AF, BG, CH, etc. qui forment la commune section de deux faces contiguës. La *hauteur* du prisme est une perpendiculaire abaissée d'une de ses bases sur l'autre (*) ; et suivant que cette perpendiculaire est ou n'est pas parallèle, et par conséquent égale à chacune des arêtes, le prisme est *droit* ou *oblique*.

210. VI. Le *parallélipipède* est un prisme à six faces, parallèles deux à deux, et formant ainsi des parallélogrammes égaux et semblables. Si tous les plans ou toutes les faces qui terminent ce solide sont des rectangles, il est appelé *parallélipipède rectangle* ; et si outre cela ces plans sont tous égaux, alors ils forment des quarrés, et le solide devient un *cube*. On lui donne en particulier le nom de *mètre cube*, de *toise cube*, etc. suivant que chacune de ses faces est un mètre quarré, une toise quarrée, etc.

211. Il y a deux manières de concevoir la formation du prisme. La première (FIG. 91) consiste à se représenter une étendue solide, terminée par des parallélogrammes AF, BG, CH, DE, qui étant unis par leur longueur, aboutissent à deux plans parallèles ABCD, EFGH, lesquelles seront les bases du prisme. La seconde manière se réduit à imaginer un polygone quelconque EFGH, qui se mouvant parallèlement à lui-même le long d'une droite

(*) Quelquefois on prend pour base du prisme la face sur laquelle le solide est censé appuyé; et alors sa hauteur est une perpendiculaire abaissée du point le plus élevé du solide sur cette face.

EA (qu'on appelle pour cette raison la *directrice du mouvement*) décrit un espace solide qui est nécessairement un prisme (207). Si le plan générateur ABCD (FIG. 92) est un cercle, le prisme prend le nom de *cylindre*; et comme alors chaque base a un centre, on peut joindre ces centres par une ligne droite, laquelle est appelée l'*axe* du cylindre. Ce solide est *droit* ou *oblique*, suivant que son axe est perpendiculaire ou oblique à ses bases. Quand le cylindre est droit, on peut concevoir qu'il a été formé par le mouvement circulaire d'un rectangle ABCD (FIG. 93) qui fait une révolution entière sur un de ses côtés immobiles AB. Alors la droite CD décrit la surface convexe du cylindre, et les droites AD, BC, ainsi que des rayons de cercle, décrivent les bases du cylindre.

212. DEMANDE. *Nous demandons qu'on nous accorde que deux solides sont égaux et semblables, lorsqu'ils sont terminés par un même nombre de plans égaux et semblables.*

La vérité de cette demande ne saurait être contestée; puisque, dans ce cas, les angles d'un de ces solides étant nécessairement égaux à ceux de l'autre, il n'est rien qui établisse une difference entre eux. Ils peuvent donc être *superposés*, c'est-à-dire, qu'on peut les concevoir comme se pénétrant mutuellement dans toutes leurs parties; ce qui les rend non-seulement semblables, mais égaux en tout.

213. THÉORÈME I. *Le parallélipipède droit* EFGHIKLM (FIG. 94), *et le parallélipipède oblique* ABCDEFGH, *de même base et de même hauteur, sont égaux en solidité.*

DÉMONSTRATION Les prismes triangulaires AIEBKF, DMHCLG sont égaux (211); donc si l'on retranche de chacun la partie commune DINCKO, les restes seront égaux; or, ces restes étant ajoutés au prisme ENHFOG forment, d'un côté, le parallélipipède droit, et de l'autre, le parallélipipède oblique. Donc, etc.

214. COROLLAIRE. Il suit de là: 1.° *Que sans changer sa solidité, un parallélipipède oblique peut être réduit à un*

parallélipipède droit de même base et de même hauteur; et qu'ainsi on peut rendre ses faces perpendiculaires à ses bases, et par conséquent rectangulaires.

2.° *Que les bases elles-mêmes peuvent être réduites en rectangles*; puisqu'on peut toujours les considérer comme deux faces du solide.

215. THÉORÈME II. *Quel que soit le parallélipipède* ABCDEFGH (FIG. 91) *droit ou oblique, les prismes triangulaires* ADCEHG, ABCEFG *en seront les moitiés.*

DÉMONSTRATION. Les deux lignes AE, CG, étant parallèles (208), on voit d'abord qu'un même plan peut passer par les quatre points A, C, G, E (33), et devenir la section commune des deux prismes triangulaires. Or ces deux prismes sont égaux (211). Donc chacun sera la moitié du parallélipipède proposé ABCDEFGH.

216. COROLLAIRE. Il suit de là, *que deux prismes triangulaires, l'un droit et l'autre oblique, de même base et de même hauteur, sont égaux*; car ils sont chacun les moitiés de deux parallélipipèdes égaux (212).

217. THÉORÈME III. *Deux prismes triangulaires droits, de hauteur égale, sont entre eux comme leurs bases.* Ou bien désignant ces solides par P et p, leurs bases par B et b, on a $P : p :: B : b$.

DÉMONSTRATION. 1.° Si ces bases sont commensurables, supposons les divisées en parties égales à leur commune mesure : que la première contienne un nombre N de ces parties, tandis que la seconde en contient un nombre n; ce qui donnera $B : b :: N : n$; que sur chacune de ces parties égales on élève des prismes droits de même hauteur que P ou p : alors ces petits prismes seront égaux de part et d'autre (211), et par conséquent leurs sommes seront entre elles :: N : n; or, les solidités P et p sont comme ces sommes; donc 1.° on aura $P : p :: N : n :: B : b$.

2.° Si les bases que je suppose représentées par les

triangles ABC, DEF (FIG. 95) sont incommensurables, je dis qu'on aura la même proportion. Car si cela n'était pas ainsi, supposons que ABH étant plus grand que ABC, on eût P : p :: ABH : DEF ; prenons sur DEF une aliquote plus petite que ACH, et supposons que ACG est ce qu'il faut ajouter à la base ABC ; pour pouvoir la mesurer par cette aliquote : dans ce cas ABG < ABH, et de plus elle est commensurable avec DEF. Désignant donc par Q le prisme droit, élevé sur ABG, par P celui qui est élevé sur ABC, par p celui qui est élevé sur DEF, on aura par la première partie du Théorème Q : p :: ABG : DEF, tandis que l'on a (hyp.) P : p :: ABH : DEF. Or, ABH > ABG. Donc P > Q, ou bien la partie est plus grande que le tout ; ce qui est absurde. Donc, etc.

218. COROLLAIRE I. *Deux prismes triangulaires obliques, ou bien l'un droit et l'autre oblique, de hauteur égale, sont entre eux comme leurs bases.* Car les prismes triangulaires obliques valant des prismes triangulaires droits, de même base et même hauteur (215), les uns doivent suivre le même rapport que les autres.

219. COROLLAIRE II. *Des prismes de hauteur égale, soit droits, soit obliques, ou bien l'un droit et l'autre oblique, qui ont pour bases des polygones quelconques, sont entre eux comme ces bases.* Car si ces polygones (FIG. 96) ont un égal nombre de côtés, comme ABCDE et *abcde*, qu'on désigne par P le premier prisme, et par p le second : par P', P'', P''' les prismes construits sur les triangles ABC, ACD, ADE, et par p', p'', p''' les prismes élevés sur les triangles *abc*, *acd*, *ade*, on aura (216,

$$P' : P'' : P''' :: ABC : ACD : ADE.$$

Donc . . . P : P' :: ABCDE : ABC.

de même.... p : p' :: *abcde* : *abc*.

Or, (216). . P' : p' :: ABC : *abc*.

Donc . . . P : p :: ABCDE : *abcde*.

Si les bases qu'on compare n'ont pas le même nombre de côtés,

côtés, comme ABCDE, MNL, appelant Q le prisme élevé sur la seconde, et gardant pour l'autre les dénominations ci-dessus, on aura :

$$P^{I} : P^{II} : P^{III} : Q :: ABC : ACD : ADE : MNL.$$

Donc. . . $P : Q :: ABCDE : MNL.$

et de tout cela on conclura que *deux prismes quelconques de bases égales et de hauteurs égales, sont égaux en solidité.*

220. Remarque. Le corollaire, ainsi que le théorème précédent, supposent qu'en comparant les solidités de deux prismes, on détermine leurs bases de la même manière dans chacun, c'est-à-dire, en prenant une des deux faces égales et parallèles qui s'y trouvent toujours (207). Car si (fig. 97) dans deux prismes triangulaires ABCDEF, GHIKLM, on prenait pour base du premier le parallélogramme ADFC; et pour base du second, le triangle GHI: et que, de plus, les hauteurs prises au dessus de ces bases étant égales, le parallélogramme ADFC fût double du triangle GHI, *les deux solides, loin d'être en raison de ces bases, seraient égaux entre eux.* Car si à chacun on en ajoutait un autre qui lui fût égal et semblable, ils deviendraient des parallélipipèdes à hauteurs égales et à bases égales; puisque l'une de ces bases seraient ADFC, et l'autre GHI × 2. Ces parallélipipèdes seraient donc égaux (218); et par conséquent leurs moitiés, c'est-à-dire, (214) les prismes triangulaires ABCDEF, GHIKLM, le seraient aussi.

221. Théorème IV. *Des prismes droits de même base sont entre eux comme leurs hauteurs;* ou bien (fig. 98) appelant les prismes droits ABCGHI, ABCDEF, le premier P, et le second p, on aura $P : p :: BH : BE$.

Démonstration. 1.° Si les hauteurs BH et BE sont des lignes commensurables, supposons-les divisées en parties égales, et que, par chacune de ces divisions, on coupe ces

deux prismes parallèlement à la base commune ABC, dans ce cas, ces sections termineront des prismes égaux : et le nombre de ceux qui seront dans P sera au nombre de ceux qui seront dans p :: BH : BE, ou bien on aura P : p :: BH : BE.

2.° Si l'on n'avait pas la même proportion lorsque BH et BE sont incommensurables, supposons qu'on eût P : p :: BN : BE ; ajoutons à BH la partie HL, qui la rende commensurable avec BE, et par une aliquote plus petite que HN : appelons Q le prisme ABCKLM, qui aurait BL pour hauteur. Cela posé :

$$Q : p :: BL : BE.$$

Tandis que (hyp.) $P : p :: BN : BE$.

Or, $BN > BL$. Donc $P > Q$, ce qui est absurde.

222. Remarque. Puisqu'un prisme oblique vaut un prisme droit de base égale et de hauteur égale (218), il est aisé de voir que la proportion établie par le théorème précédent s'étend à toute sorte de prismes.

223. Corollaire. I. *Des prismes quelconques* ABCDEF (fig. 98), *et* ABCDEFI (fig. 99), *qui ont des bases égales, sans être les mêmes, sont entre eux comme leurs hauteurs.* Car si, sur la base ABC, on élève le prisme ABCKLM de même hauteur que ABCDEFI, il sera égal à celui-ci (218). Or, le prisme ABCDEF est au prisme ABCKLM comme la hauteur BE est à la hauteur BL ; donc, etc.

224. Corollaire II. Puisque des prismes quelconques à hauteurs égales, sont comme leurs bases (218), et que ceux qui ont des bases égales, sont comme leurs hauteurs (222), on en conclura (alg. 241) qu'ils sont entre eux en raison composée de leurs bases et de leurs hauteurs : ou bien que désignant le rapport de leurs bases par celui des deux nombres B, b ; le rapport de leurs hauteurs par celui des deux nombres, H, h, et les deux prismes par P et p, on aura toujours P : p :: BH : bh.

225. Il s'ensuit de là, 1.° *que si dans deux prismes les bases sont en raison inverse des hauteurs, leurs solidités sont égales, et réciproquement.* Car si B : b :: h : H, ou aura BH $= bh$, et par conséquent P $= p$. Pareillement si P $= p$, BH $= bh$, ou bien B : b :: h : H.

226. 2.° *Que deux prismes semblables sont entre eux en raison triplée ou comme les cubes des deux nombres, dont le rapport exprime celui des dimensions homologues quelconques de ces solides.* Car toutes les faces de ces solides étant des figures planes semblables (206), leurs dimensions homologues sont proportionnelles entre elles (115); et par conséquent proportionnelles aux hauteurs. Donc ici la raison des bases, ou bien (*) B : b, est composée de deux raisons égales (117); et si on lui ajoute celle des hauteurs, laquelle est H : h, on aura BH : bh, qui sera composée de trois raisons égales, et qui vaudra par conséquent (alg. 220) la raison qu'il y a entre les cubes des nombres qui sont les termes d'une de ces raisons, ou bien qui expriment le rapport de deux dimensions homologues de ces solides.

227. 3.° Que si p est le prisme qu'on prend pour unité de mesure d'un autre prisme P, tandis que la base et la hauteur du premier sont les unités de mesure pour la base et la hauteur du second, la proportion ci-dessus (223) deviendra P : 1 :: BH : 1. Ce qui signifie que *si l'on multiplie le nombre qui exprime combien de fois la base* B *d'un prisme quelconque contient son unité de mesure, par celui qui exprime combien de fois la hauteur contient son unité, le produit indiquera combien de fois le prisme* P *contient celui qui lui sert d'unité, ou bien il exposera sa valeur mesurée par cette unité.*

Cette proposition s'énonce ordinairement d'une manière abrégée en ces termes, *la solidité d'un prisme quel-*

(*) Dites : *la raison de* B *à* b *est composée, etc.*

conque est exprimée par le produit de sa base multipliée par sa hauteur (*).

228. REMARQUE. Il faut observer ici qu'on prend ordinairement le cube pour la mesure des solidités, ainsi que le quarré est employé pour la mesure des surfaces. La raison de ce procédé est que le cube ayant ses trois dimensions égales, la même unité de longueur, savoir, l'arête du cube, sert à mesurer les trois dimensions du solide; ce qui est plus simple que si chacune de ces dimensions avait sa mesure particulière, comme il pourrait arriver, si l'on prenait un autre prisme pour unité.

D'après cela, si l'on veut savoir, par exemple, combien de mètres cubes sont contenus dans un prisme, on cherche d'abord le nombre des mètres quarrés qui sont contenus dans sa base, on le multiplie par le nombre qui exprime combien il y a de mètres dans sa hauteur, et ce produit désigne le nombre de mètres cubes que contient le solide mesuré.

229. THÉORÈME V. *La surface latérale d'un prisme quelconque* ABCDEFI (FIG. 99), *droit ou oblique, est exprimée par le produit d'une de ses arêtes* AF, *multipliée par le contour d'une section* abcde, *faite dans ce prisme perpendiculairement à ses arêtes.*

DÉMONSTRATION. Puisque toutes ces arêtes sont parallèles (208), si l'une est perpendiculaire au plan de la section, les autres le seront aussi; et par conséquent (191) les lignes *ab*, *bc*, *cd*, etc. qu'elles rencontreront sur ce plan, seront perpendiculaires à ces mêmes arêtes AF, BG, CH, etc. ou bien si celles-ci sont prises pour bases dans les parallélogrammes AG, BH, CI, etc. les autres en se-

(*) Il est inutile d'avertir que cette proposition doit être prise dans le sens de ce qui la précède, et que cela suffit pour faire disparaître l'absurdité qu'elle semble présenter d'abord, en disant qu'il faut multiplier une surface par une ligne (Voyez la note de la page 270).

ront les hauteurs. Donc la surface latérale du prisme sera $AF \times ab + BG \times bc + CH \times cd +$ etc; et comme AF, BG, CH, sont des lignes égales (208), on aura pour l'expression de la surface, $AF \times ab + AF \times bc + AF \times cd +$ etc. ou bien $AF \times \overline{ab + bc + cd +}$ etc. c'est-à-dire, le produit d'une arête par le contour d'une section perpendiculaire.

230. Remarque. Puisque les bases d'un même prisme sont des polygones égaux, ayant mesuré l'une par les méthodes ci-dessus (168 et 171), on connaît l'autre; et alors pour avoir la surface entière du solide, il faut ajouter sa surface latérale à celle de ses bases.

231. Corollaire. Si le prisme est droit, la section perpendiculaire *abcde* sera égale à sa base, et chacune des arêtes vaudra la hauteur; donc alors *la surface latérale de ce solide sera exprimée par le contour de la base multiplié ou par sa hauteur, ou par une de ses arêtes.* On voit qu'il n'en saurait être de même dans les prismes obliques, parce que dans ceux-là le contour de la section faite perpendiculairement à la longueur, n'est pas égal à celui de la base.

232. Remarque. Il faut observer ici que le cylindre pouvant être considéré comme un prisme qui a pour base un polygone d'une infinité de côtés, tout ce que nous avons dit de l'un de ces solides, peut s'appliquer à l'autre; et comme celui-ci a toujours un axe qui détermine sa longueur, on peut faire entrer l'expression de cette ligne dans toutes les déterminations où nous avons employé celle de l'arête du prisme.

CHAPITRE II.

De la Pyramide.

233. DÉFINITION I. *La pyramide* (FIG. 100) *est un polyèdre formé par la réunion de plusieurs triangles* SOT, STR, SRQ, SQP, SPO, *disposés de manière que leurs bases forment le contour d'un polygone* OTRQP, *et que tous leurs sommets aboutissent à un même point* S. Ce point est appelé le *sommet* de la pyramide, tandis que le polygone OTRQP en est la *base*. Si cette base est un triangle, on a une pyramide *triangulaire* ou bien un *tetraèdre*; si elle est un quadrilatère, un pentagone, un exagone, etc. la pyramide est appelée *quadrilatère*, *pentagonale*, *exagonale*, etc.

234. II. Une pyramide est *régulière*, quand elle a pour base un polygone régulier, et que en outre toutes ses faces sont des triangles isocèles et égaux; elle est *irrégulière* quand une de ces conditions manque. L'*apothème*, dans une pyramide régulière, est la perpendiculaire SX qui mesure la hauteur d'une de ses faces, et par conséquent de toutes les autres. L'*axe* dans une pyramide, qui a pour base un polygone quelconque symétrique ou régulier, n'est autre chose que la droite menée du sommet au centre de sa base; et ces pyramides sont ou *droites* ou *obliques*, suivant que l'axe est ou n'est pas perpendiculaire au plan de leur base.

235. III. La *hauteur* d'une pyramide est la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de sa base.

236. IV. Si l'on suppose que le cercle PRQT (FIG. 101) soit immobile, et que la droite SP ayant un point fixe en S au dessus de ce cercle, fasse une révolution entière autour de sa circonférence, on pourra concevoir un solide renfermé entre le plan circulaire PRQT, et la surface con-

vexe décrite par cette droite, et ce solide sera un *cône*. Il aura un *axe*, savoir, la droite SC menée du sommet au centre de la *base*, ou du cercle PRQT; et suivant que cet axe sera perpendiculaire ou oblique au plan de la base; ou bien suivant que le mobile SP fera toujours le même angle ou des angles variables avec ce plan, le cône sera *droit* ou *oblique*. C'est pourquoi on peut se représenter le cône droit, comme un solide formé par la révolution d'un triangle rectangle SCP, qui, restant toujours perpendiculaire sur le même plan, ferait une révolution entière sur le côté immobile SC.

237. THÉORÈME I. *Si une pyramide est coupée par des plans parallèles à sa base, les différentes sections formeront des figures semblables à la base, et par conséquent semblables entre elles, et ces sections seront comme les quarrés de leurs distances au sommet.*

DÉMONSTRATION. Car dans la même pyramide les deux sections ABCD, *abcd* (FIG. 102), ne sont autre chose que des figures dessinées sur des plans parallèles par des lignes droites SA, SB, SC, etc. menées du même point S. Elles sont donc semblables (197); et leurs surfaces sont comme les quarrés de leurs distances au sommet S de la pyramide (198).

238. COROLLAIRE. On conclura de là (FIG. 102 et 103), *que si deux pyramides* ABCDS, DEFS, *de même hauteur et de différentes bases, sont coupées parallèlement à ces bases à même distance du sommet, les deux sections* abcd, ABC, *seront entre elles comme les bases* ABCD, DEF. Car appelant dans chaque pyramide sa hauteur H, et la distance de la section au sommet h, l'on aura, d'un côté, ABCD : *abcd* :: H^2 : h^2; et de l'autre DEF : ABC :: H^2 : h^2. Donc ABCD : DEF :: *abcd* : ABC.

239. THÉORÈME II. *Si l'on coupe* (FIG. 103), *une pyramide triangulaire* DEFS, *par un plan* ABC *parallèle à la face opposée*; 1.° *la petite pyramide* ABCS *qui naîtra de là sera*

semblable à la grande; 2.° si la section divise également les côtés de la grande pyramide aux points A, B, C, *chaque face de la petite vaudra le quart de la face correspondante de la grande.*

DÉMONSTRATION. 1.° La face ABC est semblable à DEF (236) : en outre, la ligne AB étant parallèle à DE, ainsi que BC l'est à EF, et AC à DF (195), le triangle SAB est semblable au triangle SDE; le triangle SBC est semblable à SEF, et SAC à SDF. Donc (206) la petite pyramide ABCS sera semblable à la grande DEFS.

2.° Si les côtés SD, SE, SF, sont divisés également aux points A, B, C, on aura (106) $AB = \frac{1}{2} DE$, $BC = \frac{1}{2} EF$, $AC = \frac{1}{2} DF$. Donc (177) $ABC = \frac{1}{4} DEF$, et pour la même raison $SAB = \frac{1}{4} SDE$, $SBC = \frac{1}{4} SEF$, et $SAC = \frac{1}{4} SDF$. Donc, etc.

240. COROLLAIRE. On conclura de là (FIG. 104) *que si dans une pyramide triangulaire* ABDC (*) *on fait deux sections* HIK, HGE, *qui partagent également les côtés de la pyramide aux points* H, I, K, G, E, *on en retranchera deux nouvelles pyramides* HIKC, AEGH, *semblables et égales entre elles.* Semblables, parce que chacune sera semblable à la grande (238); et égales, parce que les faces HIK, et AEG, valant chacune $\frac{1}{4}$ ABD (238), seront égales entre elles; de même HIC et AEH valant chacune $\frac{1}{4}$ ABC, seront égales (il en est ainsi des autres faces). Et partant les deux pyramides HIKC, HGEA, étant terminées par un égal nombre de faces égales, seront elles-mêmes égales (211).

241. THÉORÈME III. *Toute pyramide triangulaire* ABDC (FIG. 104) *peut être décomposée en deux pyramides* AEGH, HIKC, *égales, semblables entre elles et semblables à la*

(*) On n'a point ombré cette pyramide, crainte de confusion; et il nous a paru plus commode de prendre pour sa base la face ABD, ce qui suppose le sommet placé en C, et relevé au dessus du plan de la base ABD.

grande, et en deux prismes triangulaires égaux BIFEHG, FDGIKH.

DÉMONSTRATION. Si les côtés de la pyramide sont divisés également aux points E, F, G, H, I, K: qu'on fasse passer une section par les trois points I, H, K, et une autre par les trois points H, E, G, on retranchera les deux pyramides HIKC, AEGH égales, semblables entre elles et semblables à la totale (239). Il s'agit donc de prouver que ce qui reste de la pyramide totale, savoir, IKHBDGE, peut être décomposé en deux prismes triangulaires égaux.

Or, cela est ainsi; car les triangles HIK, GFD, sont égaux, puisque (238) chacun est le quart de ABD: ils sont équiangles, puisque chacun est semblable à ABD; donc leurs côtés homologues sont égaux: en outre (195), HK est parallèle à GD, IK à FD, IH à EB, et par conséquent à FG. Donc, dans le solide IHKFGD les deux faces triangulaires sont égales, et les côtés de l'une parallèles et égaux aux côtés correspondants de l'autre; et par conséquent les autres faces sont des parallélogrammes (91), ce qui indique nécessairement un prisme triangulaire: comme il en est de même des deux faces BIF, EHG, le solide qui reste, savoir, BIFEHG sera également un prisme triangulaire. Or, en prenant pour base du premier le triangle GFD, et pour base du second le parallélogramme BFGE, qui est une de ses faces, ces solides ont même hauteur, et de plus la base de l'un est un parallélogramme double de la base triangulaire de l'autre (90). Ils sont donc égaux (219); et par conséquent, etc.

242. REMARQUE. Il faut observer qu'en décomposant une pyramide triangulaire, ainsi qu'il est indiqué dans le théorème précédent, une des deux pyramides égales HIKC a nécessairement une face HIK commune avec un des deux prismes égaux, savoir, avec FDGHIK; et qu'ainsi en prenant cette face pour base dans ces deux solides, et la face parallèle ABD pour base dans la pyramide totale, on peut dire (238) que *chacun de ces solides a une base*

sous-quadruple de celle de la pyramide dont ils sont tirés. Et comme le plan HIK ne peut partager également les côtés AC, BC, DC de la grande pyramide, sans diviser sa hauteur en deux parties égales, dont l'une mesure alors la hauteur de la pyramide HIKC, et l'autre celle du prisme FDGHIK, *chacune de ces hauteurs sera la moitié de celle qu'a la pyramide totale.*

243. THÉORÈME IV. *Une pyramide triangulaire quelconque est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur.*

C'est-à-dire, que si l'on désigne par b la base de ce prisme, et par h sa hauteur, ce qui donnera bh pour l'expression de sa solidité (226), on aura $\frac{1}{3}bh$ pour celle de la pyramide.

DÉMONSTRATION. Si l'on décompose la pyramide donnée et toutes celles qui naîtront de celle-là, ainsi qu'il est indiqué dans le théorème précédent, la première division donnera deux prismes égaux et deux pyramides égales : la seconde, quatre prismes égaux et quatre pyramides égales : la troisième, huit prismes égaux et huit pyramides égales ; et toujours de même. En outre, un des deux prismes et une des deux pyramides, qui viennent de chaque décomposition, ont une hauteur sous-double et une base sous-quadruple de celle qu'a la pyramide dont ils sont tirés (241 et 238). Donc, par la première division, on aura un prisme et une pyramide qui auront chacun pour hauteur $\frac{1}{2}h$, et pour base $\frac{1}{4}b$. Donc (226) le prisme vaudra $\frac{1}{2}h \times \frac{1}{4}b$ ou $\frac{1}{8}bh$, et les deux prismes ensemble vaudront $\frac{1}{4}bh$.

Par la seconde division, on aura quatre prismes égaux, dont un aura sa hauteur exprimée par $\frac{1}{4}h$, et sa base exprimée par $\frac{1}{16}b$. Donc, sa solidité sera exprimée par $\frac{1}{64}bh$, et celle des quatre ensemble par $\frac{1}{16}bh$.

Par la troisième division, on aura huit prismes égaux, et un de ceux-là aura sa hauteur exprimée par $\frac{1}{8}h$ et sa base par $\frac{1}{64}h$. Donc sa solidité sera $\frac{1}{512}bh$, et celles des huit ensemble, $\frac{1}{64}bh$.

Et comme de pareilles divisions peuvent être réitérées, jusqu'à ce que l'excès de la pyramide donnée sur la somme de ces prismes soit plus petit que toute quantité assignable, on pourra dire alors que cette pyramide vaut la somme de ces prismes. Or, cette somme étant représentée par la progression géométrique décroissante à l'infini $\frac{1}{4}\,bh$, $\frac{1}{16}\,bh$, $\frac{1}{64}\,bh$, $\frac{1}{256}\,bh$ . . . . . ou bien par $bh\,(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots.)$ est (*Alg.* 262) $\frac{1}{3}\,bh$. Donc l'expression de la solidité de la pyramide donnée sera $\frac{1}{3}\,bh$; tandis que (226) celle de la solidité du prisme de même base et de même hauteur sera bh; ou bien la première sera le tiers de la seconde.

244. COROLLAIRE I. *Une pyramide* OPQRTS (FIG. 100), *qui a pour base un polygone quelconque, est donc le tiers du prisme de même base et de même hauteur : ou bien sa solidité sera exprimée dans tous les cas par le tiers du produit de sa base multipliée par sa hauteur.* Les pyramides triangulaires OPTS, PTRS, PQRS, sont chacune le tiers des prismes triangulaires de même hauteur, élevés sur leurs trois bases (242). Donc la somme de ces trois pyramides, ou bien la pyramide totale, sera le tiers de la somme de ces trois prismes, ou bien du prisme total; et par conséquent (226) sa solidité sera exprimée par le tiers du produit de sa base multipliée par sa hauteur.

245. COROLLAIRE II. Il suit de là 1.° que les pyramides qui ont des hauteurs égales et des bases égales, sont égales entre elles, quelle que soit la forme de ces bases. 2.° Que celles qui ont des bases égales, sont comme leurs hauteurs. 3.° Que celles qui ont des hauteurs égales, sont comme leurs bases. 4.° Que celles qui ont les bases en raison inverse des hauteurs, sont égales, et réciproquement. 5.° Que celles qui sont semblables, sont entre elles comme les cubes de leurs hauteurs ou de deux autres dimensions homologues quelconques. Toutes ces conséquences sont fondées sur ce que les pyramides sont le tiers de prismes de même base et de même hauteur,

et que ceux-ci admettent entre eux tous ces divers rapports.

246. SCOLIE. Pour avoir la solidité d'une pyramide tronquée à bases parallèles, il faudra la compléter, et soustraire la solidité du complément de celle de la pyramide entière. Or (FIG. 102), puisqu'on connaît la base *abcd* de ce complément *abcd* S, il ne s'agit que de trouver sa hauteur S*h*, qu'on aura de cette manière AB : *ab* :: SH : S*h*. Donc AB — *ab* : *ab* :: SH — S*h* ou H*h* : S*h* = $\frac{ab \times Hh}{AB - ab}$. Connaissant S*h*, en l'ajoutant à *h*H on a SH ; et par conséquent on a la solidité de la pyramide *abcd*S qui sert de complément, ainsi que celle de la pyramide totale ABCDS. Donc en soustrayant l'une de l'autre, on aura celle de la pyramide tronquée ABCD*abcd*.

247. THÉORÈME V. *La surface latérale d'une pyramide régulière est égale à la moitié du contour de sa base multiplié par son apothème.*

DÉMONSTRATION. Cette surface est nécessairement égale à la somme des triangles qui la composent. Or, dans la pyramide régulière, l'apothème est la hauteur commune de tous ces triangles (233), et leurs bases forment le contour de la base de la pyramide. Donc, etc.

248. REMARQUES. I. Si la pyramide régulière ABCDS, était coupée à la moitié de sa hauteur par un plan parallèle à sa base, le contour *abcd* de cette nouvelle section serait la moitié du contour de la base (106). *On peut donc encore, pour avoir la surface de la pyramide régulière, multiplier son apothème par le contour d'une section moyenne, faite parallèlement à sa base.*

II. Si la pyramide est irrégulière, on ne saurait mesurer sa surface, ainsi qu'il est indiqué dans le théorème précédent ; parce que les divers triangles qui forment ces faces n'ont pas tous la même hauteur. Il faut donc alors,

pour estimer cette surface, prendre celle de chaque face triangulaire en particulier, et leur somme sera la surface latérale de la pyramide.

249. THÉORÈME VI. *Si l'on coupe une pyramide régulière* (FIG. 102) *par un plan* abcd *parallèle à sa base, la surface latérale du tronc* ABCDabcd *sera égale au reste de l'apothème* Pp *multiplié, ou bien par la demi-somme des contours des deux bases* AC, ac, *ou bien par le contour entier d'une section moyenne et parallèle à ces bases.*

DÉMONSTRATION. Chaque face de la pyramide tronquée comme A*b*, B*c*, etc. forme un trapèze; puisque AB et *ab*, BC et *bc*, etc. sont parallèles (195) : en outre, le reste de l'apothème, savoir P*p*, mesure dans tous ces trapèzes la distance des deux côtés parallèles. Donc le trapèze A*b* $= Pp \times \frac{AB + ab}{2}$: le trapèze B*c* $= Pp \times \frac{BC + bc}{2}$, et ainsi des autres : d'ailleurs, à la place de la demi-somme des côtés parallèles de ces trapèzes, on pourrait prendre les droites moyennes et parallèles à ces côtés (167), lesquelles forment le contour d'une section moyenne et parallèle. Donc la somme de ces trapèzes ou bien la surface latérale du tronc, pourra être exprimée indifféremment, ou par la demi-somme des contours des deux bases, multipliée par l'apothème, ou par le contour entier de la section moyenne et parallèle, multiplié par cet apothème.

250. REMARQUE. Puisque le cône peut être considéré comme une pyramide qui a une infinité de faces, ou qui a pour base un polygone régulier d'une infinité de côtés : et que d'ailleurs, ce que nous avons dit de la pyramide en général, est indépendant du nombre des côtés de sa base, il s'ensuit que tout cela peut s'appliquer au cône ; et que les mêmes rapports que nous avons trouvés plus haut, soit en comparant les pyramides entre elles, soit en les comparant aux prismes, se trouveront aussi en comparant les cônes entre eux, ou bien en les rapportant à des cylindres.

CHAPITRE III.

De la Sphère.

251. DÉFINITIONS. I. *La sphère est un solide dans lequel tous les points de la surface sont à égale distance d'un point pris en dedans, qui est le centre du solide.* Toute ligne droite qui traverse la sphère en passant par le centre, en est un *diamètre* ou un *axe*; et la moitié de cette ligne qui mesure la distance du centre à la surface, en est un *rayon.*

252. Pour se représenter la formation de ce solide, il faut (FIG. 105) concevoir un demi-cercle ABDC qui fasse une révolution entière sur son diamètre immobile AD. Dans ce mouvement, la demi-circonférence ABD décrira une surface convexe, dont tous les points seront à égale distance du centre C, et qui, par conséquent, terminera une sphère, et toutes les lignes comme EF, BC, menées de la demi-circonférence perpendiculairement à son diamètre AD, décriront dans cette révolution des cercles (12).

253. II. On distingue dans la sphère *des grands* et *des petits* cercles. Les premiers ont pour centre le centre même de la sphère; et les autres ont leur centre dans un autre point de ce solide. D'où il suit que les grands cercles de la sphère ont tous un diamètre commun, puisqu'ils ont le même centre, et qu'ainsi ils sont égaux; mais qu'il n'en est pas de même des petits cercles.

254. III. Si un plan passe par le centre de la sphère, il la partage en deux parties égales, et chacune est appelée un *hémisphère.* S'il passe hors du centre, il la partage en deux parties inégales, dont la petite est appelée une *calotte sphérique*; et enfin si deux plans parallèles coupent

ce solide, la partie qu'ils interceptent entre eux, s'appelle une *zone*.

255. IV. Nous appelons *sphéroïde* le solide engendré par la révolution d'un demi-polygone régulier et symétrique ADEFGB (FIG. 106) qui tourne sur un diamètre AB, mené d'un angle à l'angle opposé de ce polygone.

256. THÉORÈME I. *Si un polygone régulier et symétrique fait une révolution entière sur un diamètre* AB *mené d'un angle à l'angle opposé, il décrira un sphéroïde, dont la surface sera exprimée par le produit de l'axe* AB *multiplié par la circonférence du cercle inscrit daus le polygone.*

DÉMONSTRATION. Dans cette révolution les côtés contigus à l'axe, comme AD, BG, décriront des surfaces de cônes entiers, les côtés obliques à cet axe, comme DE, GF, décriront des surfaces de cônes tronqués, et enfin les côtés qui lui seront parallèles, comme EF, décriront des surfaces cylindriques. Or, chacune de ces surfaces doit être exprimée par le produit de la portion de l'axe qu'elle renferme, multipliée par la circonférence du cercle inscrit.

1.° Du point X, qui est le milieu du côté AD, soit tiré le rayon XC et la ligne Xx perpendiculaire à AB et parallèle à DL. Les triangles ADL, XCx, seront semblables (117). Donc AL : AD :: Xx : XC; ou bien les circonférences étant comme les rayons, AL : AD :: circ. Xx : circ. XC. Donc AL × circ. XC = AD × circ. Xx. Or, AD × circ. Xx = la surface conïque décrite par AD (246). Donc cette surface = AL × circ. XC.

2.° Du point H, pris au milieu de ED, tirez aussi le rayon HC, et la ligne HI perpendiculaire à AB et parallèle à EM. Les triangles semblables DEK, HCI (117) donneront DK ou LM : DE :: HI : HC; ou bien LM : DE :: circ. HI : circ. HC. Donc LM × circ. HC = DE × circ. HI. Or, la surface du cône tronqué décrite par le côté DE,

est exprimée par DE × circ. HI (247); donc elle le sera aussi par LM × circ. HC.

3.° La surface cylindrique décrite par EF parallèle à l'axe, est déterminée, suivant ce que nous avons vu (230) par EF × circ. FR; ou ce qui est le même, par MR × circ. PC. De sorte que la surface de chacun des solides qui composent le sphéroïde, sera exprimée par la portion de l'axe qu'ils renferment, multipliée par la circonférence du cercle inscrit dans le polygone; et par conséquent la surface totale du sphéroïde aura pour expression le produit de l'axe entier multiplié par la circonférence du cercle inscrit.

257. COROLLAIRE. Si le polygone régulier a une infinité de côtés, il pourra être confondu avec le cercle inscrit (144); et par conséquent le sphéroïde pourra alors être considéré comme une sphère. D'où il suit que *la surface de la sphère aura pour expression le produit de son axe multiplié par la circonférence d'un de ses grands cercles.* Ou bien appelant cette surface s, son axe a, la circonférence du grand cercle c, on aura $s = ac$.

258. Il suit de là, 1.° que *la surface de la sphère est quadruple de celle de son grand cercle.* Car celle-ci (169) $= \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}ac$, tandis que l'autre $= ac$.

259. 2.° Qu'*elle vaut la surface convexe du cylindre circonscrit.* Car la hauteur de ce cylindre est nécessairement a, et le contour de sa base est c; donc sa surface convexe est ac, ainsi que celle de la sphère.

260. 3.° Qu'*elle est à la surface totale du cylindre circonscrit* :: 2 : 3. Car pour avoir la surface totale du cylindre, à sa surface convexe exprimée par ac (230), il faut ajouter celle de chaque base exprimée par $\frac{1}{4}ac$; ce qui donnera $ac + \frac{1}{2}ac$ ou $\frac{3}{2}ac$. Donc la surface de la sphère sera à celle du cylindre :: $ac : \frac{3}{2}ac$ :: 2 : 3.

261. REMARQUE. Par la manière dont on vient de trouver la surface de la sphère, il est évident :

1.° Que si le polygone générateur est supposé le demi-cercle ABD (FIG. 105), faisant une révolution entière sur son diamètre AD, la surface de la calotte sphérique AEF *e*, produite par la rotation de l'arc AE, vaudra AF × *c*; c'est-à-dire, *la hauteur ou épaisseur de la calotte, multipliée par la circonférence d'un grand cercle de la sphère, ou bien par la circonférence du cercle générateur.*

2.° Que la surface de la zone sphérique EP*ep*, décrite par l'arc EP, sera exprimée par FN × *c*, ou bien *par son épaisseur multipliée par la circonférence du grand cercle de la sphère.*

3.° Que si le demi-cercle ABD, au lieu de faire une révolution entière, s'arrête dans la position AKD, de façon que le point B ne décrive que $\frac{1}{n}$ de la circonférence *c* d'un grand cercle, la surface ALE, tracée par l'arc AE, vaudra $\frac{1}{n}$ de l'entière surface de la calotte; c'est-à-dire, que son expression sera AF × $\frac{c}{n}$, comme celle de DOP sera DN × $\frac{c}{n}$.

4.° Par les mêmes raisons la surface de la portion de zone, renfermée entre les deux arcs EP, LO, n'étant que $\frac{1}{n}$ de la surface entière de la même zone, sera exprimée par FN × $\frac{c}{n}$.

5.° De là on conclura que la surface entière du *fuseau sphérique* ABDK aura pour expression AF × $\frac{c}{n}$ + FN × $\frac{c}{n}$ + ND × $\frac{c}{n}$ ou bien AD × $\frac{c}{n}$; c'est-à-dire, *qu'elle sera égale à l'axe de la sphère, multiplié par l'arc de grand cercle décrit par le point* B; et comme la portion correspondante de la surface du cylindre circonscrit, ou le *fuseau cylindrique*, décrit par un même mouvement angulaire du

rectangle AI, serait aussi exprimée par AD ou HI$\times \frac{c}{n}$, il s'ensuit *que ces deux fuseaux ont des surfaces égales, ainsi que la sphère et le cylindre circonscrit.*

262. THÉORÈME II. *La solidité de la sphère a pour expression le tiers de sa surface multipliée par son rayon.*

DÉMONSTRATION. Si l'on inscrit un polyèdre dans une sphère, la différence de ces deux solides deviendra d'autant plus petite que le polyèdre aura plus de faces; de façon que si ce nombre de faces est infini, la différence de ces deux solides sera nulle, et la sphère pourra être prise pour le polyèdre. Or, la solidité de celui-ci devra être exprimée par le tiers du produit de sa surface multipliée par son rayon. Car si, sur chacune de ses faces, on conçoit une pyramide qui ait son sommet au centre du solide, et qui, par conséquent, ait pour hauteur le rayon de la sphère, la somme de ces pyramides formera la solidité du polyèdre, et leurs bases en seront la surface. Donc puisque chacune est exprimée par le tiers de sa base multipliée par sa hauteur (244), leur somme, ou bien la solidité du polyèdre, le sera par le tiers de la surface de ce solide multipliée par son rayon. Donc pareillement la solidité de la sphère, etc.

263. COROLLAIRE. Appelant donc la solidité ou le volume de la sphère v, son axe a, sa surface S, celle de son grand cercle s, on aura $v = \frac{1}{6} a \times S$. Or, $S = 4s$. Donc $v = \frac{1}{6} a \times 4s = \frac{4}{6} as = \frac{2}{3} as$. Ce qui prouve *que la solidité de la sphère peut encore être exprimée par les deux tiers de l'axe multiplié par la surface d'un grand cercle.*

Or, si l'on conçoit un cylindre circonscrit à la sphère et un cône inscrit dans ce cylindre, la solidité du premier sera exprimée par as; celle du second par $\frac{1}{3} as$. Donc *ces trois solides, savoir, le cône, la sphère et le cylindre circonscrit, seront dans le rapport des trois nombres* $\frac{1}{3}$ as, $\frac{2}{3}$ as, as: *ou bien comme* 1, 2, 3.

264. Remarque. Puisque les sphères peuvent être considérées comme des polyèdres réguliers d'une infinité de faces, on pourra toujours les prendre pour des solides semblables; et par conséquent leurs surfaces étant comme les produits de deux dimensions proportionnelles, et leurs solidités comme les produits de trois de ces dimensions, on pourra dire que *les premières sont entre elles comme les quarrés, et les secondes comme les cubes ou de leurs rayons, ou de leurs diamètres, ou des circonférences de leurs grands cercles, etc.*

SECTION IV.

De la Trigonométrie plane.

CHAPITRE PREMIER.

Notions générales et propriétés des sinus, tangentes et sécantes.

265. Définition I. *La trigonométrie plane est l'art de résoudre un triangle rectiligne quelconque, ou bien de déterminer la valeur de ses angles et de ses côtés.* On l'appelle *plane*, pour la distinguer de la trigonométrie *sphérique*, qui apprend à faire les mêmes recherches sur des triangles formés par des arcs de cercle, qu'on conçoit tracés sur la surface d'une sphère.

266. Observation. *Des six choses que présente l'idée d'un triangle, savoir, trois angles et trois côtés, si l'on n'en connaît que deux, il n'est pas possible d'avoir, sans indétermination, la valeur des quatre autres.* Puisqu'on trouvera toujours plusieurs, et quelquefois même une infinité de triangles différents, qui présenteront les mêmes données, et auxquels on pourrait indifféremment appliquer la même

solution. Ainsi (FIG. 107) les deux côtés du triangle CBD étant égaux aux deux côtés CD, CE, ou CF, CG, de tout autre triangle différent, la connaissance de ces deux côtés ne saurait servir à résoudre aucun de ces triangles en particulier. Celle de deux et même de trois angles laisse la même indétermination; puisque une infinité de triangles différents, tels que ABC, *abc*, (FIG. 52), pourvu qu'ils aient leurs côtés parallèles, doivent avoir leurs angles égaux. Enfin, si l'on ne connaît (FIG. 108) qu'un angle A et le côté adjacent AB, une infinité de triangles différents ABE, ABD, ABC, etc. présenteront les mêmes données; et si le côté connu BC (FIG. 109) est opposé à l'angle connu A, l'indétermination reste encore; puisque si du point C comme centre, et du rayon BC, on décrit l'arc BD; qu'on en décrive un semblable du point D avec le rayon DC, du point E avec le rayon DE, les triangles ABC, ADC, ADE, etc. quoique différents entre eux, auront tous le même angle A, et le côté opposé à cet angle, égal. *Il faut donc, pour résoudre un triangle, qu'on connaisse trois des six parties qui le composent, et que dans ce nombre il se trouve un côté.*

267. DÉFINITION II. *Le sinus d'un arc ou de l'angle qu'il mesure, est la perpendiculaire abaissée d'une extrémité de cet arc, sur le rayon qui passe à l'autre extrémité.* Ainsi dans l'arc AB (FIG. 110), si l'on abaisse du point A la perpendiculaire AP sur le rayon BC, elle sera le sinus de cet arc ou de l'angle ACB qu'il mesure. *Le cosinus d'un arc est le sinus de son complément;* ainsi AD étant le complément de AB, son sinus AO sera le cosinus de AB. Or, comme on a toujours AO=PC, il s'ensuit que *le cosinus d'un arc vaut la partie du rayon comprise entre le sinus et le centre.*

268. DÉFINITION III. *Le sinus verse d'un arc est la partie* BP *du rayon, comprise entre le sinus et l'arc.* On l'appelle *sinus verse* par opposition à AP, qui est appelé *sinus droit.* Le sinus verse du complément d'un arc est son *cosinus verse*, tel est DO par rapport à l'arc AB.

269. Corollaire I. On conclura de la définition ci-dessus, *que le sinus d'un arc est toujours la moitié de la corde qui sous-tend un arc double.* Car, puisque le sinus AP est perpendiculaire à CB, il est la moitié de la corde AG, qui sous-tend l'arc ABG, lequel est double de AB (55 et 56) (*); d'où il s'ensuit :

270. 1.° *Que les sinus croissent les arcs croissant, jusqu'à ce que ceux-ci soient parvenus à* 90°; *qu'ils décroissent ensuite jusqu'à* 180°, *et qu'enfin le plus grand de tous les sinus, savoir, celui de* 90°, *vaut le rayon.* Car les cordes des arcs doubles croissent depuis l'arc 0 jusqu'à celui de 90°; et alors cette corde est la plus grande de toutes, puisqu'elle vaut le diamètre; donc sa moitié, ou bien le sinus de l'arc de 90°, vaut le rayon. Mais depuis 90° jusqu'à 180°, les cordes des arcs doubles décroissent, et à ce terme cette corde est 0. Donc les sinus décroissent aussi depuis 90° jusqu'à 180°.

271. 2.° *Que le sinus d'un angle ou d'un arc est égal à celui de son supplément;* puisque la même corde AG sous-tend le double de l'arc AB, et le double de son supplément ADE.

272. 3.° *Que le cosinus d'un angle obtus* BCQ, *ou, ce qui est le même, d'un arc* BDQ *plus grand que* 90°, *est égal à celui de son supplément* QE; puisque l'un et l'autre est CR (267). Mais il faut observer que, relativement au centre C, le cosinus CR tombe du côté opposé à celui où il tombait lorsque l'angle BCQ valait moins de 90°. Ainsi (20) *le cosinus d'un angle obtus est négatif relativement aux co-*

(*) C'est d'après cette propriété que M. Godin, de l'académie des sciences de Paris, a donné une étymologie très-vraisemblable du mot *sinus*. Les cordes, a-t-il dit, s'appellent, en latin, *inscriptæ*, et les sinus étant leurs moitiés, ont dû être d'abord appelés *semisses inscriptarum*, qu'on a écrit par abréviation de cette manière *S. Ins.* On a ensuite rapproché ces deux abréviations qui ont fait le mot *sins*, on lui a donné une terminaison latine dans le temps où tout finissait en *us*, et il en a résulté celui de *sinus*. (Voy. Mont. hist. des Math. addit. P. XXXIII).

sinus des angles aigus qu'il contient, mais son sinus ne l'est pas.

273. COROLLAIRE II. *Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est le cosinus de l'autre;* puisqu'un de ces angles est le complément de l'autre.

274. REMARQUE. Si l'on *considérait* l'arc AB (FIG. 111) comme parvenu à un tel degré de décroissement, qu'on dût, d'après la même supposition, le confondre avec une ligne droite, *son sinus verse* BD *vaudrait le quarré de cet arc, divisé par le diamètre* BE. Car alors BAE serait un triangle rectangle en A (68), et le sinus AD deviendrait une perpendiculaire abaissée de l'angle droit sur l'hypothénuse. Donc on aurait (124) ∴ BD:BA:BE, ou bien $BD = \frac{BA^2}{BE}$.

275. DÉFINITION IV. *Si, sur l'extrémité du rayon* BC, *qui termine l'arc* AB (FIG. 110), *on élève la perpendiculaire* BT, *jusqu'à la rencontre du rayon prolongé* CA, *qui passe à l'autre extrémité du même arc, elle sera la tangente de cet arc* AB, *ou de l'angle* ACB *qu'il mesure.* DS tangente du complément AD sera *la cotangente* de ce même arc AB.

COROLLAIRE. On peut conclure de cette définition :

276. 1.° *Que depuis* 0° *jusqu'à* 90° *la tangente d'un arc augmente, et sa cotangente diminue.*

277. 2.° *Qu'à ces deux termes il n'y a point de tangente ;* puisque, dans un cas, il n'y a point d'arc; et que, dans l'autre, le rayon étant parallèle à la tangente, tirée de l'extrémité de l'arc, il ne peut y avoir de rencontre entre eux (*).

278. 3.° *Qu'au-delà de* 90° *plus l'arc ou l'angle augmente, plus sa tangente diminue, de façon qu'elle égale toujours*

(*) On dit communément que la tangente d'un arc de 90° est *infinie*, tandis que nous disons ici que cet arc n'en a aucune. Ces deux manières de s'exprimer, qui semblent si opposées, ne le sont cependant qu'en apparence.

celle de son supplément. Car pour l'angle obtus BCQ la tangente est B *t*, ainsi que pour son supplément BCG ; et plus l'angle BCQ devient obtus, plus le point *t* se rapproche du point B. Il faut cependant observer qu'alors la tangente est prise au dessous du rayon BC, tandis qu'elle était prise au dessus, lorsque cet angle BCQ était aigu ; et qu'ainsi *un angle devenant obtus, la situation de sa tangente est opposée à celle qu'elle avait, cet angle étant aigu.* On voit assez qu'il en est de même pour sa cotangente DV; et que plus l'angle BCQ devient obtus, plus cette ligne DV augmente.

279. 4.° *Que la tangente de* 45° *est égale au rayon.* Car alors le triangle BCT est isocèle, puisque l'angle en C étant de 45°, l'angle en T doit l'être aussi. Donc BT = BC.

280. Définition V. *La sécante* CT *d'un arc* AB *n'est autre chose que le rayon* CA, *qui passe par une extrémité de cet arc, prolongé jusqu'à la rencontre de la tangente* BT, *tirée de l'autre extrémité.*

281. Corollaire. 1.° La sécante d'un arc ou d'un angle o est donc égale au rayon, puisqu'alors le point T tombe sur le point B ; 2.° depuis l'arc o la sécante augmente et la cosécante diminue jusqu'à celui de 90°, et là il cesse d'y avoir une sécante ; puisqu'il n'y a plus de concours entre le rayon et la tangente ; 3.° au-delà de 90° la sécante reparaît, pour décroître jusqu'à 180°, où elle vaut encore le rayon.

282. Théorème I. *Dans tout triangle les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés.*

Démonstration. Si l'on inscrit le triangle dans le cercle, chacun de ses côtés sera la corde d'un arc double de celui qui mesure l'angle opposé (68); et par conséquent la moitié de chaque côté sera le sinus de cet angle. Les divers côtés seront donc entre eux, comme les sinus des angles opposés.

282. THÉORÈME II. *Le sinus d'un arc de* 30° *vaut la moitié du rayon de cet arc.*

DÉMONSTRATION. La corde qui sous-tend l'arc de 60° vaut le rayon (140); donc le sinus de 30°, qui est la moitié de cette corde (269), vaut la moitié du rayon.

284. REMARQUE. Les cordes des arcs doubles n'étant pas proportionnelles à ces arcs (150), les moitiés des arcs et des cordes ne sauraient être en proportion. C'est pourquoi *les sinus de deux arcs ne sont point entre eux comme ces arcs; mais ils sont comparativement plus grands par rapport aux petits arcs, que par rapport aux grands.*

285. THÉORÈME III. *Pour un arc quelconque* AB, *on a ces deux proportions :*

$$\textit{cos}\ \text{AB} : \textit{sin}\ \text{AB} :: \text{R} : \textit{tang}\ \text{AB}.$$
$$\div\ \textit{cos}\ \text{AB} : \text{R} : \textit{sec}\ \text{AB}.$$

DÉMONSTRATION. Les triangles équiangles APC, TBC, donnent

$$\text{PC} : \text{AP} :: \text{BC} : \text{BT}.$$
$$\text{PC} : \text{AC} :: \text{BC} : \text{CT}.$$

Donc, etc.

286. REMARQUE. Nous verrons plus bas (291) que connaissant le sinus d'un arc, on connaît son cosinus; et par conséquent on a, d'après le théorème précédent, sa tangente et sa sécante.

287. COROLLAIRE. De ce que l'on a $\div\ \textit{cos}\ \text{AB} : \text{R} : \textit{sec}\ \text{AB}$, on peut conclure que pour un autre arc NB, on aurait également $\div\ \textit{cos}\ \text{NB} : \text{R} : \textit{sec}\ \text{NB}$. Donc, $\textit{cos}\ \text{AB} \times \textit{sec}\ \text{AB} = \textit{cos}\ \text{NB} \times \textit{sec}\ \text{NB}$, ou bien $\textit{cos}\ \text{AB} : \textit{cos}\ \text{NB} :: \textit{sec}\ \text{NB} : \textit{sec}\ \text{AB}$, ce qui exprime que *les cosinus de deux arcs sont en raison inverse de leurs sécantes.*

288. THÉORÈME IV. *Le rayon d'un arc quelconque est moyen proportionnel entre la tangente et la cotangente de cet arc.*

DÉMONSTRATION. Les triangles semblables CBT, CDS, donnent BT : BC :: CD : DS, ou bien $\div$ *tang* BA : R : *cot* BA.

COROLLAIRE. Comme la même proportion aura lieu pour tout autre arc BN, c'est-à-dire, qu'on aura $\div$ *tang* BN : R : *cot* BN. Il s'ensuit que quels que soient les deux arcs BN et BA, on aura, *tang* BA × *cot* BA = *tang* BN × *cot* BN : ou bien, *tang* BA : *tang* BN :: *cot* BN : *cot* BA ; ce qui désigne *que les tangentes de deux arcs sont en raison inverse de leurs cotangentes.*

289. THÉORÈME V. *La somme des sinus de deux arcs est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme de ces arcs est à la tangente de leur demi-différence.*

DÉMONSTRATION. 1.° Si l'on a les deux arcs BA, BD (FIG. 112), dont les sinus sont A*p*, DP : que du point A on mène A*c* parallèle au diamètre B*b*, et qu'on prolonge DP jusqu'en G, on aura A*p* = EP, DP = PG, BG = BD. Donc la somme des deux sinus sera GE, et leur différence DE ; tandis que la somme des deux arcs BA, BD, sera GA, et leur différence AD.

2.° Si du point *c* on tire les droites *c*D, *c*G, et que d'un rayon C*c* on décrive l'arc *dg*, qui passe au centre C des arcs donnés, l'angle A*c*G aura pour mesure *ag*, ou bien $\frac{1}{2}$ AG (67). Donc *ag* = $\frac{1}{2}$ AG, et pour la même raison, *ad* = $\frac{1}{2}$ AD. Par conséquent si on fait passer au point *a* la ligne T*t* perpendiculaire sur le rayon *ac*, la partie *a*T sera la tangente de *ag*, demi-somme des arcs donnés, et la partie *at* sera la tangente de *ad*, leur demi-différence. Or (106), GE : DE :: *a*T : *at*. Donc la somme des sinus de deux arcs, etc.

290. COROLLAIRE. Si donc on désigne les deux angles d'un triangle par A, *a*, les côtés opposés par C, *c*, leurs sinus par *S*, *s*, on aura $S + s : S - s :: tang \frac{A+a}{2} : tang \frac{A-a}{2}$.

Mais par ce que nous avons dit plus haut (281) $S : s :: C : c$.

ou bien $S+s : S-s :: C+c : C-c$. Donc en substituant, on aura $C+c : C-c :: tang \frac{A+a}{2} : tang \frac{A-a}{2}$; c'est-à-dire, *que la somme de deux côtés d'un triangle quelconque est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés, est à la tangente de leur demi-différence.*

291. THÉORÈME VI. *Dans tout triangle rectangle on a ces deux proportions : 1.° Le rayon est au sinus d'un des angles aigus, comme l'hypothénuse est au côté opposé à cet angle : 2.° Le rayon est à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté de l'angle droit appartenant à cet angle aigu, est à l'autre côté de l'angle droit.*

DÉMONSTRATION. 1.° Les sinus des angles d'un triangle étant proportionnels aux côtés opposés (282), on a ici : le sinus de l'angle droit ou le rayon (270) est au sinus d'un angle aigu, comme l'hypothénuse est au côté opposé à cet angle.

2.° Dans le triangle rectangle ABC (FIG. 113) si du point C et d'un rayon CA on décrit l'arc A*a*, il est évident que AB sera la tangente de cet arc ou de l'angle en C. Donc $R : tang\ C :: AC : AB$.

292. PROBLÈME I. *Connaissant le sinus d'un arc, trouver son cosinus, et réciproquement.*

SOLUTION. Le sinus AP et le cosinus PC (FIG. 110) sont toujours les deux côtés d'un triangle rectangle, dont le rayon AC est l'hypothénuse. Donc on a (174) $PC = \sqrt{AC^2 - AP^2}$, et $AP = \sqrt{AC^2 - PC^2}$, ou bien connaissant le sinus d'un arc, pour avoir le cosinus, *il faut soustraire le quarré du sinus de celui du rayon, et prendre la racine quarrée du reste.* Et connaissant le cosinus, pour avoir le sinus, *il faut soustraire le quarré du cosinus de celui du rayon, et prendre la racine quarrée du reste.*

293. COROLLAIRE. En soustrayant la valeur du sinus ou

du cosinus du rayon, on a le cosinus verse ou le sinus verse ; *donc de ces quatre choses : le sinus, le cosinus, le sinus verse, le cosinus verse ; si on en connaît une, on connaît toutes les autres.*

294. PROBLÈME II. *Connaissant le sinus d'un arc* ADB (FIG. 114) *trouver celui de sa moitié* AD.

SOLUTION. Le triangle rectangle ABP donne AB $= \sqrt{AP^2 + PB^2}$; donc $\frac{AB}{2}$ ou bien *sin* AD = ... $= \frac{\sqrt{(AP^2 + PB^2)}}{2}$.

295. PROBLÈME III. *Connaissant le sinus d'un arc* BD ; *trouver* AP, *sinus d'un arc double* ADB.

SOLUTION. Le rayon CD étant perpendiculaire à la corde AB, les deux triangles BAP, BCQ, sont rectangles et semblables. Donc on a, BC : CQ :: BA : AP $= \frac{CQ \times BA}{BC}$, c'est-à-dire, *que le sinus d'un arc double d'un arc donné, vaut le cosinus de celui-ci, multiplié par le double de son sinus, et divisé par le rayon.*

296. PROBLÈME IV. *Connaissant les sinus de deux arcs* BD, DE (FIG. 115), *trouver le sinus et le cosinus, tant de leur somme que de leur différence.*

SOLUTION. 1.° Si l'on prolonge le sinus PE jusqu'en A, l'arc AD = DE, et par conséquent la différence des deux arcs donnés sera BA, dont le sinus est AH ; tandis que leur somme sera BE, qui a pour sinus EF. Or, pour trouver l'expression de ces deux lignes, qu'on tire d'abord P*p*, A*a*, parallèles au rayon BC : ensuite PQ perpendiculaire à ce même rayon, et l'on aura PQ = *p*F : E*p* = *pa* (102) ; puisque EP = PA. De plus, le triangle PQC sera semblable au triangle DGC ; et par conséquent DC : DG :: PC : PQ ; ou bien R : *sin* BD :: *cos* DE : PQ

$= \frac{sin\ BD \times cos\ DE}{R}$. Le triangle EP$p$ sera semblable au triangle DGC, et l'on aura DC : GC :: EP : Ep ; ou bien R : *cos* BD :: *sin* DE : Ep $= \frac{sin\ DE \times cos\ BD}{R}$. Donc, pour exprimer à la fois PQ+Ep, ou EF sinus de la somme, et PQ — Ep, ou AH, sinus de la différence des deux arcs, BD, DE, on aura $\frac{sin\ BD \times cos\ DE \pm sin\ DE \times cos\ BD}{R}$.

2.° Pour trouver les cosinus FC, HC, les triangles PQC, DGC, donnent DC : GC :: PC : CQ $= \frac{GC \times PC}{DC}$ $= \frac{cos\ BD \times cos\ DE}{R}$: et les triangles EPp, DGC, donnent DC : DG :: EP : Pp $= \frac{DG \times EP}{DC} = \frac{sin\ BD \times sin\ DE}{R}$. Or, CF, cosinus de la somme des deux arcs BD, DE, vaut CQ — Pp; et CH, cosinus de leur différence, vaut CQ+Pp, puisque Pp = QF = QH (102). Donc le cosinus de la somme et de la différence de ces arcs sera. . . . . $\frac{cos\ BD \times cos\ DE \mp sin\ BD \times sin\ DE}{R}$.

CHAPITRE II.

De la résolution de toute sorte de triangles rectilignes.

297. Pour résoudre les triangles rectilignes, on a d'abord cherché à connaître les sinus qui répondent aux divers angles, afin d'en pouvoir conclure la valeur de ces angles. Pour cela, on a supposé que le rayon d'un cercle quelconque fût divisé en un très-grand nombre de parties égales, par exemple, en 100000, et l'on a fixé tantôt exactement, tantôt par approximation, combien de ces parties sont renfermées dans le sinus d'un angle donné

quelconque. On a construit des tables à plusieurs colonnes, dont l'une contient les différents arcs en degrés et minutes; et dont les autres contiennent les sinus, tangentes et sécantes de ces arcs, calculés d'après la valeur convenue du rayon des tables. Par ce moyen, dès qu'on connaît un arc, on trouve vis-à-vis son sinus; et réciproquement, connaissant un sinus, on voit à quel arc il répond. Mais comme les grands nombres qui entrent dans ces calculs, étaient très-incommodes pour les multiplications et les divisions, on a mis à côté leurs logarithmes, par le moyen desquels ces opérations se changent en de simples additions et soustractions. Les problèmes suivants en fourniront divers exemples.

298. Problème I. *Mesurer un angle.*

Solution. Pour mesurer un angle, on emploie le *graphomètre* ou le *rapporteur*, suivant que l'angle est supposé décrit ou sur le terrain ou sur le papier.

Le graphomètre est un demi-cercle ADB (fig. 116) dont la circonférence est divisée en degrés, et dont le centre C porte sur un pied CP, de façon que le plan de l'instrument est mobile en tout sens. Un de ses diamètres AB est fixe, et l'autre EF (qu'on appelle l'*alidade*) est mobile sur le centre C. Ils portent chacun à leurs extrémités des *pinnules*, qui ne sont autre chose que des plaques de cuivre, élevées perpendiculairement sur ces diamètres, et percées d'un petit trou ou d'une petite fente. Si l'on veut mesurer sur le terrain un angle MCN, on s'assure par le moyen d'un à-plomb, que le centre de l'instrument répond au sommet de l'angle, on le rend parallèle au plan de cet angle, et puis ayant visé à travers les pinnules supposées en A et B, un piquet élevé sur le point N, on tourne l'alidade EF, jusqu'à ce qu'on voie, a travers ses pinnules, un autre piquet, placé sur le point M; alors le nombre des degrés, qui se trouvent dans l'arc BF, détermine la valeur de l'angle MCN.

Le rapporteur est un demi-cercle AFB (fig. 117) divisé en ses degrés, dont on se sert, ou bien pour mesurer un

angle DCE, tracé sur le papier, ou bien pour lever un angle connu, tracé sur le terrain. Dans le premier cas, on place le centre de l'instrument au sommet de l'angle, son diamètre AB, sur l'alignement d'un côté CE, et le nombre des degrés contenus dans l'arc BG donne la valeur de l'angle. Dans le second cas, on prend l'arc BG du même nombre de degrés que l'angle donné; et ayant marqué sur le papier les points C, B, G, on tire les droites CB, CG, qui forment l'angle BCG, égal à celui qu'on veut lever et rapporter sur le papier.

299. PROBLÈME II. *Connaissant dans un triangle quelconque un côté et deux angles, trouver le troisième angle et les deux autres côtés.*

SOLUTION. 1.° Le troisième angle est évidemment connu, puisqu'il est supplément des deux autres (78).

2.° Dès qu'on connaît les trois angles du triangle ABC (FIG. 118) avec un côté quelconque AB, on a les deux autres côtés AC, BC, par les proportions suivantes :

$$\sin C : \sin B :: AB : AC.$$
$$\sin C : \sin A :: AB : BC.$$

300. PROBLÈME III. *Etant donnés deux côtés et un angle, trouver tout le reste.*

SOLUTION. Ou bien l'angle connu est renfermé entre les côtés connus, ou bien il est opposé à l'un d'eux.

Premier cas. Si dans le triangle ABC, on connaît seulement l'angle B, et les côtés BA, BC, qui le forment, on cherchera d'abord la valeur des deux autres angles A et C, dont on connaît la somme (78); par cette analogie, $AB + BC : AB - BC :: tang \frac{A+C}{2} : tang \frac{A-C}{2}$, dans laquelle les trois premiers termes étant évidemment connus, le quatrième fera trouver la tangente de la demi-différence des deux angles A et C; et par conséquent la demi-différence de ces mêmes angles. Si donc on l'ajoute à la demi-somme, on aura le plus grand angle C (qu'on

connaitra, parce qu'il sera opposé au plus grand côté donné AB); et si on l'en soustrait, on aura le plus petit A. Tous les angles étant connus, pour avoir le côté inconnu AC on dira *sin* A : *sin* B :: BC : AC.

Second cas. Si l'angle donné A est opposé à un des côtés connus BC, on cherchera d'abord l'angle C, en faisant BC : BA :: *sin* A : *sin* C; ce qui donnera la valeur du sinus de l'angle C, ou bien cet angle lui-même, par le moyen des tables. Les deux angles A et C étant connus, on aura le troisième B, qui sera leur supplément, et alors le côté inconnu AC se trouvera en disant *sin* A : *sin* B :: BC : AC.

301. Remarque. Il faut observer ici que dans ce second cas, l'angle C n'étant connu que par son sinus, et la même valeur de sinus appartenant, soit à l'angle aigu C, soit à l'angle obtus ADB, qu'on suppose supplément du premier, le même calcul doit se rapporter indifféremment à ces deux angles, et par conséquent aux deux triangles ABC, ABD. Cela indique qu'alors le problème a deux solutions, et que l'état de la question doit indiquer celle qui convient au cas dont il s'agit, en faisant savoir si l'angle opposé au côté AB est aigu ou obtus.

302. Problème IV. *Connaissant les trois côtés du triangle* ABC (fig. 118) *trouver ses trois angles.*

Solution. Si AC est le plus grand côté, on est assuré (81) que B est le plus grand angle; et qu'ainsi la perpendiculaire BP tombera en dedans du triangle (83). On a donc cette proportion (155), AC : AB+BC :: AB—BC : AP—PC, par laquelle on connaîtra la différence des deux segments AP, PC : et comme on connaît leur somme AC, on aura (*Alg.* 331) la valeur de chacun en particulier. On pourra donc résoudre le triangle rectangle ABP (300), puisque, outre l'angle droit, on connaîtra ses deux côtés AB et AP; et l'on aura l'angle A, lequel étant connu, le triangle donné ABC sera résolu par le problème précédent.

303. REMARQUE. On voit assez que pour connaître la différence des deux segments AP, PC, il n'est pas nécessaire dans la pratique, d'abaisser la perpendiculaire BP, mais qu'il suffit de faire cette proportion : *le plus grand côté est à la somme des deux autres, comme leur différence est à* x, *dont la valeur sera la différence des segments.*

Nous allons rapporter ici quelques exemples, auxquels on fera l'application des problèmes précédents.

304. EXEMPLE I. *On demande de trouver la distance de deux endroits* A *et* B (FIG. 119) *dont on peut approcher.*

SOLUTION. Ayant choisi une station commode en C, mesurez d'abord l'angle ACB, puis les côtés AC, BC ; et résolvant le triangle ABC (300), dans lequel vous connaissez deux côtés et un angle, vous trouverez le côté inconnu AB.

Supposons...
$$\begin{cases} AC = 60 \text{ mètres.} \\ BC = 86 \text{ M.} \\ C = 57° \end{cases}$$

ce qui donnera
$$\begin{cases} AC + BC = 146 \text{ M.} \\ AC - BC = 26 \text{ M.} \\ \frac{A+B}{2} = 61° 30' \end{cases}$$

Donc (*Alg* 292) *Log* 146. *Log* 26 .·. *Log tang* 61°. 30'. *Log tang* $\frac{A-B}{2}$.

Or, ...
$$\begin{cases} \textit{Log } 146 \ldots\ldots = 2.1643529 \\ \textit{Log } 26. \ldots\ldots = 1.4149733 \\ \textit{Log tang } 61° 30' = 10.2652356 \end{cases}$$

Donc *Log tang* $\frac{A-B}{2} = 9.5158560$ et partant $\frac{A-B}{2}$ $= 18° 9'$.

Or,

Or, A > B ; donc A = 79° 39′ et B = 43° 21′.
On a donc (282) *sin* 79° 39′ : *sin* 57° :: 86 : AB.

Mais . . . . { *Log sin* 79° 39′ = 9. 9928753
Log sin 57° = . . 9. 9235914
Log 86 = ... 1. 9344984.

Donc *Log* AB = 1,8652145, et partant AB = 74 mètres.

305. Exemple II. *On demande la distance de deux points* A *et* B, *dont un seul* A *est accessible.*

Solution. Ayant choisi pour station le point C, d'où l'on peut découvrir les points A et B, mesurez l'angle C, l'angle A, et le côté AC ; on conclura de là l'angle B, et l'on établira cette proportion pour avoir le côté AB.

sin B : *sin* C :: AC : AB.

Supposons... { C = 64°
A = 80°, et partant B = 36°
AC = 236 mètres.

Or, ... { *Log sin* 36° = 9. 7692187
Log sin 64° = 9. 0536602
Log 236. . . = 2. 3729120.

Donc *Log* AB = 1.6573535 ; et partant AB = 45 mètres.

306. Exemple III. *Mesurer la distance de deux lieux inaccessibles* A *et* B.

Solution. Ayant mesuré une base ED, telle que de ses points E, C, D, on puisse voir A et B, prenez ensuite du point C les angles ACB, ACE, d'où vous conclurez la valeur de leur supplément BCD : prenez la mesure des angles E et D, ainsi que des côtés EC, CD, et vous con-

naîtrez dans chaque triangle AEC, BDC, deux angles et un côté ; ce qui suffit pour avoir les deux côtés AC, BC. Donc dans le triangle ABC, outre l'angle C, vous connaîtrez les deux côtés qui le forment, ce qui suffira pour avoir le troisième côté AB.

307. EXEMPLE IV. *On demande de trouver l'élévation perpendiculaire d'une montagne au dessus de la ligne horizontale* AB (FIG. 120).

SOLUTION. Ayant choisi deux stations commodes A et B, d'où l'on puisse voir le sommet S, et ayant mesuré à la toise la base AB, prenez la valeur des angles SAB, SBA, et vous aurez le côté SB (299). Celui-là étant connu, prenez l'angle SBE, dont le côté BE est horizontal, et alors dans le triangle rectangle SBE, vous connaîtrez l'angle aigu en B, l'angle droit en E, et l'hypothénuse SB. Il sera donc aisé de le résoudre, et d'avoir le côté SE, qui est la hauteur de la montagne.

308. EXEMPLE V. *Trouver la hauteur d'une tour ou d'un objet quelconque, élevé perpendiculairement sur l'horizon, soit qu'on puisse ou qu'on ne puisse pas en approcher.*

SOLUTION. 1.° Si la tour AB (FIG. 121) est accessible, mesurez sur une ligne horizontale, la distance CF du pied de la tour à un point F, que vous choisirez de façon que l'angle en F soit à peu près de 45° : prenez cet angle, et dans le triangle rectangle ACF, vous connaîtrez, outre l'angle droit en C, les deux angles aigus en F et en A ; ce qui suffit pour trouver la valeur du côté AC, auquel ajoutant la hauteur de l'instrument FG, vous aurez la hauteur entière de la tour.

2.° Si la tour est inaccessible, choisissez deux stations en D et en F, telles que les angles DAF, FAC, ne soient pas trop aigus : prenez la valeur des angles en F, et de l'angle en D, ainsi que la longueur de la ligne DF : et alors connaissant un côté et deux angles du triangle DAF, vous aurez la valeur de FA. Celle-là étant connue,

on a dans le triangle rectangle FAC, l'angle en F, l'angle droit en C, et l'hypothénuse FA, ce qui suffit (300), pour trouver le côté AC, qui est la hauteur de la tour.

SECTION V.

De la Trigonométrie sphérique.

CHAPITRE PREMIER.

Principes de Trigonométrie sphérique et propriétés générales des triangles.

309. DÉFINITIONS I. *Un triangle sphérique n'est autre chose que la portion de la surface d'une sphère renfermée en tous sens par trois arcs de grand cercle.* Ainsi nous ne considérerons point des triangles qui pourraient être formés par des arcs de petits cercles.

310. II. *L'objet de la trigonométrie sphérique est de résoudre ces sortes de triangles;* c'est-à-dire, connaissant trois des six choses qui les composent, savoir, trois angles et trois côtés, d'en déduire la détermination des trois autres.

311. REMARQUE. Dans la trigonométrie plane la connaissance de trois angles ne suffit point pour résoudre le triangle rectiligne qui en est l'objet, parce que ces trois données ne font connaître que les *rapports* des trois côtés, non leurs valeurs absolues. Ici, au contraire, ne cherchant point les grandeurs réelles des côtés, mais seulement le nombre des degrés qu'ils contiennent ou leur rapport avec le quart de cercle, il suffit de connaître trois des six choses quelconques composant un triangle sphérique, même les trois angles seulement, pour être en état de le

résoudre. Si l'on veut ensuite avoir les valeurs absolues des côtés, on les trouvera avec toute l'approximation qu'on peut desirer (173), pourvu qu'on connaisse le rayon de la sphère à laquelle ils appartiennent.

312. III. Si sur le plan d'un grand cercle ABDE (FIG. 122), on conçoit un de ses diamètres FM, élevé perpendiculairement en dessus et en dessous, passant par le centre C, il deviendra *l'axe* du cercle, et ses extrémités F, M, en seront les *pôles* (*).

313. COROLLAIRE I. Il suit de là, 1.° *que l'arc* FD *mené sur la surface de la sphère entre le pôle* F *d'un cercle et sa circonférence* ABDE *est sur un plan* FCD *perpendiculaire à celui-ci*; puisqu'il est conduit le long de la perpendiculaire FC (194).

2.° *Qu'il est de* 90°, puisqu'il mesure l'angle droit FCD, formé par l'axe FC sur le plan ABDE.

3.° *Que tous les grands cercles, qui, comme* AFDM, *passeront par les pôles* F, M, *d'un autre cercle* ABDE, *ou*, ce qui est la même chose, *qui auront pour section commune l'axe* FM *de cet autre, seront perpendiculaires à celui-là* (194).

Et réciproquement, *si dans la sphère deux arcs* ID, HD, *sont sur deux plans circulaires faisant un angle droit* HDI, *étant suffisamment prolongés ils passeront par les pôles l'un de l'autre.*

314. COROLLAIRE II. On conclura de là, 1.° *que si deux arcs* FG, FD, *ou*, ce qui est le même, *si les plans de ces deux arcs sont perpendiculaires à un troisième cercle* ABDE, *ils passent l'un et l'autre par les pôles de ce troisième; et qu'ainsi leur commune intersection* F *est un de ces pôles.*

2.° *Que la circonférence d'un grand cercle étant donnée de position sur une sphère, il est facile de trouver ses pôles;* car il suffit d'écarter les pointes d'un *compas sphérique*, jus-

(*) Dans la FIG. 122, le cercle ABDE est supposé horizontal, et l'axe FM vertical, ainsi que le plan circulaire AFDM.

qu'à ce qu'elles renferment le quart de la circonférence du cercle donné; puis appuyant successivement l'une sur deux points de la circonférence, et traçant avec l'autre deux arcs de chaque côté du plan circulaire assigné, les points où ces arcs se couperont de part et d'autre seront les deux pôles; puisque, par la construction, ils seront distants de 90° de la circonférence donnée.

Réciproquement, *le pôle d'un grand cercle étant assigné sur la surface de la sphère, il est aisé de décrire la circonférence du cercle auquel il appartient,* en appuyant une pointe du compas sur ce pôle, et décrivant la circonférence avec l'autre pointe sous une ouverture de 90°.

315. Corollaire III. Deux plans circulaires FDM, FGM, ne pouvant s'approcher ou s'éloigner en tournant sur leur commune section, sans que leurs axes, ainsi que leurs tangentes FT, F*t*, au point F, l'une sur le demi-cercle FDM, l'autre sur le demi-cercle FGM, s'approchent ou s'éloignent également, il s'ensuit, 1.° *que l'angle formé par les axes ou par les tangentes au point* F, *est égal à celui formé par les plans;* 2.° *que deux cercles différents ne peuvent avoir les mêmes pôles.*

316. Théorème I. *Deux grands cercles de la sphère se coupent toujours en deux parties égales.*

Démonstration. Le centre de la sphère étant un point commun à tous les grands cercles (253), leur intersection passera par ce point. Donc elle sera un diamètre, et divisera chaque cercle en deux parties égales.

Ainsi deux arcs de grand cercle ne peuvent renfermer en tout sens une portion de surface sphérique, s'ils ne sont de 180° chacun.

317. Théorème II. *Un angle sphérique* DFH *a pour mesure l'arc de grand cercle* DH *compris entre ses côtés, prolongés, s'il le faut, et décrit du sommet, comme pôle.*

Démonstration. Cet angle est égal à celui formé par les

deux plans demi-circulaires FDMC, FGMC. Or, si du centre C, on élève sur le premier le rayon CD et sur le second le rayon CH, perpendiculaires à la commune section FM, et qu'avec un de ces rayons on décrive l'arc de grand cercle DH, cet arc mesurera l'angle plan (193), et en outre il aura son pôle en F (314). Donc un angle sphérique, etc.

318. COROLLAIRE. Pour abaisser du point I de la sphère un arc ID perpendiculaire sur un arc donné HD, il suffit donc, 1.° *de fixer le pôle* F *de l'arc* HD; 2.° *d'abaisser de ce pôle l'arc* FD *passant par le point* I, lequel sera perpendiculaire sur HD prolongé, s'il le faut (313).

319. THÉORÈME III. *La somme des deux côtés d'un triangle sphérique est plus grande que le troisième.*

DÉMONSTRATION. Le plus court chemin (FIG. 123) pour aller du point D au point H, sur la surface de la sphère, est l'arc de grand cercle DH. Donc, quel que soit le triangle MDH, on aura DH < DM+MH.

320. COROLLAIRE. Il suit de là que *dans tout triangle sphérique* FDH, *la somme des trois côtés est moindre que* 360°. Car les deux côtés FH, FD avec leurs suppléments MH, MD, valent 360°; mais le troisième HD est moindre que la somme de ces suppléments (319). Donc, ajouté aux côtés FH, FD, la somme vaudra moins de 360°.

321. THÉORÈME IV. *Si des trois angles d'un triangle sphérique* ABC (FIG. 124), *comme pôles, on décrit trois arcs, savoir* EF *de* A, FD *de* B, DE *de* C, *formant le triangle* DEF, *je dis :*

1.° *Que les angles du second triangle* DEF *sont les pôles des côtés opposés du premier* ABC;

2.° *Que ses côtés sont les suppléments des angles opposés du premier;*

3.° *Que ses angles sont les suppléments des côtés opposés du premier.*

DÉMONSTRATION. 1.° D est le pôle de BC. Car DF étant décrit du pôle B, le point D est à 90° de B : ED étant décrit du pôle C, le point D est à 90° de C. Donc les points B et C sont à 90° chacun de D, ou bien (314) D est le pôle de l'arc BC (on démontrerait de même que E est le pôle de AC, et que F est celui de AB).

2.° EF est supplément de A. Car puisque F est le pôle de ABH, FH est de 90°; puisque E est le pôle de ACG, EG est de 90°; donc FH + EG, ou bien FE + HG = 180°; donc FE est supplément de HG; mais HG mesure l'angle A, puisqu'il est décrit de A comme pôle. Donc FE, côté du second triangle, est le supplément de l'angle opposé A dans le premier (semblable raisonnement prouverait que FD est supplément de B, et que DE l'est de C).

3.° D est supplément du côté BC. Car B étant pôle de DF, BK = 90°; C étant pôle de DE, CL = 90°; donc BK + CL, ou LK + BC = 180°, ce qui rend LK supplément de BC. Mais LK décrit du pôle D mesure l'angle D (317); donc cet angle est supplément du côté opposé BC (le même raisonnement s'applique aux autres angles.)

322. REMARQUE. Le triangle DEF est appelé *triangle supplémentaire* de ABC; et il est clair que les parties de l'un étant connues, celles de l'autre le sont nécessairement.

323. COROLLAIRE. *La somme des trois angles d'un triangle sphérique vaut moins de* 180° × 3 *ou de* 540°, *et plus de* 180°.

Car (321) A + B + C + EF + DF + DE = 180° × 3, ou 540°. Donc A + B + C < 540°. D'ailleurs (320) EF + DF + DE < 180° × 2; donc A + B + C > 180°.

On voit donc que les trois angles d'un triangle sphérique peuvent être supposés aigus, pourvu que leur somme ne soit pas au dessous de 180°; obtus, pourvu qu'ils vaillent moins de 540°; et par conséquent qu'ils peuvent être tous droits. Ainsi leur somme n'étant point

fixe comme dans le triangle rectiligne, *de la valeur connue de deux, on ne peut point conclure celle du troisième.*

324. THÉORÈME V. *Si sur la même sphère on décrit deux triangles* ABC, abc (FIG. 124 et 125) *ils seront égaux en tout :*

1.° *S'ils ont les côtés homologues égaux, chacun à chacun;*

2.° *S'ils ont deux côtés homologues égaux renfermant un angle égal;*

3.° *S'ils ont deux angles homologues égaux, adjacents à un côté égal dans chacun;*

4.° *S'ils ont tous leurs angles homologues égaux, chacun à chacun.*

DÉMONSTRATION. Les trois premiers cas se démontrent par la méthode de superposition, ainsi qu'on l'a vu pour les triangles rectilignes (CHAP. VII, SEC. I). Le quatrième qui n'a pas lieu dans les triangles rectilignes s'ensuit du théorème précédent.

En effet, si l'on décrit les triangles supplémentaires DEF, *def*, puisque (hyp.) A = *a*, EF = *ef* (321); de même DE = *de*, DF = *df*. Donc, par le premier cas ci-dessus, les triangles supplémentaires seront égaux en tout. Donc le côté BC, supplément de l'angle D, égale *bc*, supplément de l'angle *a*; et par la même raison AC = *ac*, AB = *ab*. Donc les triangles ABC, *abc*, outre leurs angles égaux, ont leurs côtés égaux chacun à chacun; ce qui les rend égaux en tout.

325. THÉORÈME VI. *Dans tout triangle sphérique isocèle* ABC (FIG. 126) *les angles* C *et* B, *opposés aux côtés égaux* AB, AC, *sont égaux, et réciproquement.*

DÉMONSTRATION. 1.° Prenez les deux arcs égaux AD, AE, et des points B et C menez les arcs BE, CD. Cela posé, les triangles ADC, AEB, ayant l'angle commun A, et les côtés autour de cet angle égaux, chacun à cha-

cun, seront égaux en tout (324); donc DC = EB. En outre, les triangles DBC, ECB, ayant tous leurs côtés égaux, chacun à chacun, sont encore égaux en tout (324); donc l'angle DBC = l'angle ECB.

2.° Si B = C (FIG. 124), je dis qu'on aura le côté AB égal au côté AC. Car si ces angles sont égaux, leurs suppléments DF, DE, seront égaux, et le triangle supplémentaire DEF sera isocèle; donc, par la première partie du théorème, l'angle E = l'angle F; donc AC, supplément de E, vaudra AB, supplément de F, ou bien le triangle ABC sera isocèle.

326. THÉORÈME VII. *Dans tout triangle sphérique* ABC (FIG. 127), *le plus grand côté* AC *est opposé au plus grand angle* B, *le plus petit côté* BC *au plus petit angle* A.

DÉMONSTRATION. Sur le plus grand angle B, prenez l'angle CBD égal à l'angle C. Le triangle DBC sera isocèle (325) ou bien BD = DC, et BD + DA = AC. Or, (319) BD + DA > BA, côté opposé au moyen angle C. Donc AC, opposé au plus grand angle, est le plus grand côté.

2.° Si AC (FIG. 124) est le plus petit côté dans le triangle ABC, l'angle E du triangle supplémentaire sera le plus grand. Donc, par ce que nous venons de démontrer, le côté DF sera le plus grand; ou bien l'angle B, duquel il est supplément, sera le plus petit dans ABC; par conséquent si AC est le plus petit côté dans ABC, l'angle opposé B sera le plus petit.

CHAPITRE II.

Des Triangles sphériques rectangles.

327. DÉFINITIONS I. Lorsqu'un triangle sphérique n'aura qu'un angle droit, le côté opposé à cet angle sera *l'hypothénuse ;* quand il en aura plusieurs (323), l'hypothénuse sera le côté opposé à l'angle droit qu'on considérera, et alors cet angle sera appelé *angle principal*, et les deux autres seront appelés *angles obliques.*

328. II. Deux angles sont dits de *même espèce*, s'ils sont tous les deux aigus, ou tous les deux obtus, ou tous les deux droits. Il en est de même de deux arcs, suivant qu'ils sont l'un et l'autre de 90°, ou tous les deux plus grands, ou tous les deux plus petits que de 90°. Dans le cas contraire, ils sont dits *d'espèces différentes.*

329. THÉORÈME I. *Dans tout triangle sphérique rectangle chaque angle oblique est de même espèce que le côté opposé.*

C'est-à-dire, qu'il vaut 90°, si le côté opposé est de 90°; qu'il vaut plus ou moins, suivant que le côté opposé vaut plus ou moins de 90°.

DÉMONSTRATION. Supposant le triangle ABC (FIG. 128) rectangle en A :

1.° Si AB = 90°, B est le pôle de AC (313); donc BC est perpendiculaire sur AC, ou bien l'angle C = 90°.

2.° Si AB < 90°, qu'on le prolonge en D, de façon que AD = 90. Alors (313) l'angle DCA = 90°. Donc BCA < 90.

3.° Si dans ADC l'arc AD > 90°, qu'on retranche BD pour avoir AB = 90°. Alors l'angle BCA = 90°. Donc DCA > 90°.

330. THÉORÈME II. *L'hypothénuse d'un triangle rectangle sera plus petite que* 90°, *si les deux côtés ou les deux angles obliques sont de même espèce; elle sera plus grande, s'ils sont d'espèces différentes.*

DÉMONSTRATION. Supposant l'angle droit en A dans le triangle ABC (FIG. 128), je dis :

1.° Si les côtés AB, AC, sont chacun $< 90°$, l'hypothénuse $BC < 90°$. Car prolongeant AB de manière que $AD = 90°$, ou que le pôle de AC soit en D, les angles ADC, ABC, devant être de même espèce que AC (329), seront aigus; donc le supplément CBD est obtus, et partant (326) $CD > BC$. Or (313) $CD = 90°$. Donc l'hypothénuse $BC < 90°$.

2.° Si plaçant l'angle droit en F dans le triangle FDH (FIG. 123) les côtés FH et FD sont chacun $> 90°$, l'hypothénuse $DH < 90°$. Car prolongeant FD, FH, jusqu'à leur rencontre, l'angle M sera droit, comme est supposé l'angle F; et les arcs MD, MH, suppléments de FD, FH, seront chacun $< 90°$; donc, par la première partie du théorème, l'hypothénuse commune $DH < 90°$.

3.° Dans le triangle ADC, rectangle en A (FIG. 128), si $AD > 90°$ et $AC < 90°$, l'hypothénuse $DC > 90°$. Car retranchant BD de façon que $AB = 90°$, les angles ABC, ADC, devant être de même espèce que le côté opposé (329) sont chacun $< 90°$. Donc le supplément de ABC, savoir $DBC > 90°$; et puisque (313) $BC = 90°$, l'hypothénuse $DC > 90°$.

Mais par ce que nous avons vu (329) les angles obliques étant toujours de même espèce que les côtés opposés, ce que nous venons de démontrer pour ceux-ci relativement à l'hypothénuse, s'applique aux angles. Donc en général, etc.

331. THÉORÈME III. *Dans un triangle sphérique quelconque les sinus des divers angles sont comme les sinus des côtés opposés à ces angles.*

Ainsi dans le triangle sphérique ABC (FIG. 129), on aura *sin* C : *sin* B :: *sin* AB : *sin* AC.

DÉMONSTRATION. 1.° Par les trois côtés du triangle ABC conduisez au centre H de la sphère les plans de grand cercle terminés par ces côtés : leurs intersections AH, BH, CH, seront trois rayons de la sphère, ou trois arêtes de la pyramide sphérique HABC.

2.° Du point A abaissez sur la face opposée HBC la perpendiculaire AD, et le long de cette ligne, conduisez deux plans triangulaires AED, AFD, de manière que l'un soit perpendiculaire au rayon HB, l'autre au rayon HC. Alors DE et AE seront deux perpendiculaires à la ligne HB (192), et l'angle DEA qu'elles forment, vaudra l'angle sphérique B (317) : par la même raison DFA vaudra l'angle C. En outre, à cause de la perpendiculaire AD sur la face HBC, les deux triangles ADE, ADF, sont rectangles en D. Donc on a (291) :

$$R : \sin AED :: AE : AD.$$
$$\sin AFD : R :: AD : AF.$$

Donc en multipliant les termes correspondants,

$$R \times \sin AFD : R \times \sin AED :: AD \times AE : AD \times AF.$$

Ou bien effaçant les facteurs communs,

$$\sin AFD : \sin AED :: AE : AF.$$

Or (267) AE est le sinus de l'arc AB, AF est celui de l'arc AC; de plus AFD vaut l'angle sphérique C, et AED vaut B; donc *sin* C : *sin* B :: *sin* AB : *sin* AC.

On démontrerait de la même manière que *sin* C : *sin* A :: *sin* AB : *sin* BC.

332. COROLLAIRE. Si A est droit, BC sera l'hypothénuse dans le triangle rectangle ABC et les angles B et C seront les angles obliques. Donc puisque le sinus de l'angle droit

vaut le rayon, en transposant, on aura pour l'angle oblique C, R: *sin* BC :: *sin* C: *sin* AB, et pour l'angle oblique B, R: *sin* BC :: *sin* B: *sin* AC, ou bien en général *dans tout triangle sphérique rectangle le rayon est au sinus de l'hypothénuse, comme le sinus d'un des angles obliques est au sinus du côté opposé à cet angle.*

333. THÉORÈME IV. *Dans tout triangle sphérique rectangle on a cette proportion :*

Le rayon est au sinus d'un des côtés, comme la tangente de l'angle oblique adjacent à ce côté est à la tangente du côté opposé à cet angle.

Ou bien dans le triangle ABC (FIG. 130), rectangle en A, R: *sin* AB :: *tang* B: *tang* AC.

DÉMONSTRATION. Supposant la même construction que dans la FIG. 129, à cause de l'angle sphérique droit en A, les triangles CDE, CDH, seront rectangles en D, et l'on aura (291) :

CD : DE :: *tang* CED : R.
DH : CD :: R : *tang* CHD.

Donc DH : DE :: *tang* CED : *tang* CHD ; et puisque l'angle CHD vaut l'arc AC, et que l'angle CED vaut l'angle sphérique B (317), il viendra DH : DE :: *tang* B : *tang* AC.

En outre, le triangle DEH, rectangle en E, donne (291) DH : DE :: R : *sin* DHE ou *sin* AB. Donc, R : *sin* AB :: *tang* B : *tang* AC.

334. THÉORÈME V. *Si l'on prolonge les trois côtés du triangle* ABC (FIG. 131) *rectangle en* A, *de manière que* CG, CI, BD, *soient chacun de* 90° ; *si ensuite du point* B, *comme pôle, on décrit* DEH, *tel que* EH *soit de* 90°, *et de* C, *comme pôle, l'arc* GIH, *je dis :*

1.° *Que des parties du triangle* CEF, *formé par cette cons-*

truction, les unes seront égales à celles du triangle donné ABC, *les autres en seront les compléments.*

2.° *Qu'il en sera de même du triangle* HIF.

DÉMONSTRATION. 1.° Puisque B est pôle de FD, on a (313) BE = BD = 90°, et de plus des angles droits en E et en D. Donc le triangle FEC est rectangle en E.

2.° Puisque B est le pôle de DEF, et que (hyp.) l'angle BAC est droit, les arcs AF, DF, sont perpendiculaires sur BD; donc (314) F est le pôle de BD.

3.° Cela posé, comparant le triangle construit CEF avec le triangle donné ABC, on a : l'angle droit E = l'angle droit A; l'angle FCE = BCA, comme opposés au sommet; l'angle F complément du côté BA, puisqu'il est mesuré par AD, complément de BA.

Ensuite l'hypothénuse FC est complément du côté AC, puisque AF = 90°; CE l'est de BC pour la même raison; FE l'est de l'angle B, puisque B est mesuré par ED. Donc toutes les parties du triangle construit CEF sont, ou égales à celles du triangle donné ABC, ou en sont les compléments.

La même démonstration s'applique au triangle construit HIF, dans lequel on trouve l'angle droit I = l'angle droit A, l'angle oblique H = l'hypothénuse BC, l'angle F complément de BA, le côté HI complément de l'angle ACB, le côté IF = AC, l'hypothénuse HF = l'angle B.

335. REMARQUE. Les deux triangles CEF, HIF, sont appelés *triangles complémentaires* par rapport au triangle ABC; et l'on voit, par le théorème précédent, que connaissant trois choses dans le triangle ABC, on en connaît trois autres dans chacun des triangles CEF, HIF, et réciproquement, en sorte que *l'un de ceux-ci étant résolu, il sera facile de résoudre le premier.*

336. COROLLAIRE I. Par ce que nous avons vu plus haut

(333) dans le triangle complémentaire CEF, supposé rectangle en E, on a, R:*sin*EF :: *tang* F:*tang* CE. Or *sin* EF =*cos* B; *tang* F=*tang* AD=*cot* AB; *tang* CE=*cot* BC; donc R:*cos* B :: *cot* AB:*cot* BC, c'est-à-dire, que *dans tout triangle rectangle* ABC *le rayon est au cosinus d'un des angles obliques, comme la cotangente du côté adjacent à cet angle est à la cotangente de l'hypothénuse.*

Par conséquent, prenant l'angle oblique C, on aurait R. *cos* C :: *cot* AC: *cot* BC.

337. Corollaire II. Le même triangle rectangle CEF donne encore (333, R:*sin* CE :: *tang* C:*tang* EF. Or, *sin* CE =*cos* BC; *tang* EF = *cot* ED = *cot* B. Donc R: *cos* BC :: *tang* C:*cot* B; ou bien, en général, *le rayon est au cosinus de l'hypothénuse, comme la tangente d'un angle oblique est à la cotangente de l'autre;* ce qui donnerait également, R. *cos* BC :: *tang* B: *cot* C.

338. Corollaire III. Le second triangle supplémentaire HIF, rectangle en I donne aussi (333) R: *sin* HI :: *tang* H: *tang* IF. Mais, *sin* HI = *cos* IG = *cos* C; et puisque CG = 90° et BE = 90°, EG = BC; donc *tang* H = *tang* BC; de même *tang* IF = *tang* AC. Donc R:*cos* C :: *tang* BC: *tang* AC, d'où l'on déduit, en général, que *dans le triangle rectangle* ABC *le rayon est au cosinus d'un des angles obliques, comme la tangente de l'hypothénuse est à la tangente du côté adjacent;* ce qui donnerait, en prenant l'angle oblique B, R: *cos* B :: *tang* BC: *tang* AB.

339. Corollaire IV. Le même triangle HIF donne (333) R: *sin* IF :: *tang* F: *tang* HI. Or, *sin* IF = *sin* AC; *tang* F = *cot* AB; *tang* HI = *cot* C. Donc R: *sin* AC :: *cot* AB: *cot* C, ou bien, en général, *dans le triangle rectangle le rayon est au sinus d'un côté, comme la cotangente de l'autre côté est à la cotangente de l'angle opposé à ce côté;* ce qui donne également, R:*sin* AB :: *cot* AC: *cot* B.

340. OBSERVATION. On suppose dans la table suivante que le triangle rectangle à résoudre est représenté par ABC (FIG. 131), que son angle droit est en A ; qu'ainsi les deux angles obliques sont B et C. Cet angle droit étant ici une donnée générale, il ne faut, pour connaître tous les cas possibles, que combiner deux à deux les cinq autres parties, savoir les deux angles obliques, et les trois côtés AB, AC, BC. Or (*alg.* 315), ces cinq choses prises deux à deux ne pouvant donner que dix combinaisons, et chacune de ces combinaisons laissant à chercher trois inconnues, il s'ensuit que le nombre total de ces inconnues ou des questions possibles à faire avec les données requises, est ici de trente ; et qu'ainsi la table suivante ne peut présenter que trente cas différents pour la solution du triangle rectangle sphérique.

341. *Table pour la solution de tous les cas possibles du triangle sphérique* ABC, *rectangle en* A (FIG. 131).

	Etant donnés.	trouver.	ANALOGIES.	Cas où ce que l'on cherche est moindre que 90°.
1	B, C	AB	*Sin* B: *cos* C:: R: *cos* AB.	si C est moindre que 90°.
2		AC	*Sin* C: *cos* B:: R: *cos* AC.	si B est moindre que 90°.
3		BC	R: *cot* B:: *cot* C: *cos* BC.	si B et C sont de même espèce.
4	B, AB	AC	R: *sin* AB:: *tang* B: *tang* AC.	si B est moindre que 90°.
5		BC	R: *cot* AB:: *cos* B: *cot* BC.	si AB et B sont de même esp
6		C	R: *cos* AB:: *sin* B: *cos* C.	si AB est moindre que 90°.
7	B, AC	AB	R: *tang* AC:: *cot* B: *sin* AB.	douteux.
8		BC	*Sin* B: *sin* AC:: R: *sin* BC.	douteux.
9		C	*Cos* AC: *cos* B:: R: *sin* C.	douteux.
10	B, BC	AB	R: *tang* BC:: *cos* B: *tang* AB.	si BC et B sont de même esp
11		AC	R: *sin* BC:: *sin* B: *sin* AC.	si B est moindre que 90°.
12		C	R: *cos* BC:: *tang* B: *cot* C.	si BC est moindre que 90°.
13	C, AB	AC	R: *tang* AB:: *cot* C: *sin* AC.	douteux.
14		BC	*Sin* C: *sin* AB:: R: *sin* BC.	douteux.
15		B	*Cos* AB *cos* C:: R: *sin* B.	douteux.
16	C, AC	AB	R: *sin* AC:: *tang* C: *tang* AB.	si C est moindre que 90°.
17		BC	R: *cot* AC:: *cos* C: *cot* BC.	si AC et C sont de même esp.
18		B	R: *cos* AC:: *sin* C: *cos* B.	si AC est moindre que 90°.
19	C, BC	AB	R: *sin* BC:: *sin* C: *sin* AB.	si C est moindre que 90°.
20		AC	R: *tang* BC:: *cos* C: *tang* AC.	si BC et C sont de même esp.
21		B	R: *cos* BC:: *tang* C: *cot* B.	si BC et C sont de même esp.
22	AB, AC	BC	R: *cos* AB:: *cos* AC: *cos* BC.	si AB et AC sont de même esp.
23		B	R: *sin* AB:: *cot* AC: *cot* B.	si AC est moindre que 90°.
24		C	R: *cot* AB:: *sin* AC: *cot* C.	si AB est moindre que 90°.
25	AB, BC	AC	*Cos* AB: R:: *cos* BC: *cos* AC.	si BC et AB sont de même esp.
26		B	R: *tang* AB:: *cot* BC: *cos* B.	si BC et AB sont de même esp.
27		C	*Sin* BC: *sin* AB:: R: *sin* C.	si AB est moindre que 90°.
28	AC, BC	AB	*Cos* AC: *cos* BC:: R: *cos* AB.	si BC et AC sont de même esp.
29		B	*Sin* BC: *sin* AC:: R: *sin* B.	si AC est moindre que 90°.
30		C	R: *tang* AC:: *cot* BC: *cos* C.	si AC et AB sont de même esp.

342. REMARQUE. Il n'y a nulle difficulté pour la manière de se servir de la table précédente, la chose qu'on cherche étant toujours dans la colonne des analogies le

quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont connus.

La dernière colonne à droite mérite seule quelque éclaircissement. Elle explique dans quels cas ce qu'on cherche est moindre de 90°, et dans quels cas il reste du doute à cet égard. Par exemple, dans la septième analogie le quatrième terme, qui est *sin* AB, peut également faire attribuer à l'arc AB une valeur plus grande, comme une valeur plus petite, que 90°; puisque (271) le sinus d'un arc ou d'un angle est le même que celui de son supplément, tant pour le signe que pour la valeur de ce sinus. Ainsi, dans ce cas, AB restera douteux, à moins que les données, qui sont l'angle B et le côté AC, ne désignent d'après l'art. 329 si AB est ou n'est pas moindre que 90°, ce qui n'a pas lieu ici.

Au contraire, dans la onzième analogie, quoique *sin* AC se rapporte indifféremment à un arc moindre que 90° ou à son supplément, toute incertitude est levée, parce qu'on sait (329) que le côté AC, opposé à l'angle oblique B, doit être de même espèce que ce dernier, lequel étant au nombre des données, on n'ignore pas s'il est ou n'est pas moindre que 90°.

Les autres parties de cette dernière colonne sont de semblables applications des art. 329 et 330 toutes les fois qu'elles sont possibles d'après les données, pour déterminer si ce qu'on cherche est ou n'est pas moindre que 90°.

343. Scolie. En examinant en détail les trente analogies qui composent la table générale, on se convaincra par ce qui suit qu'elles sont toutes fondées sur les propriétés des triangles sphériques démontrées dans les articles 331, 332, et sur l'application de ces propriétés aux triangles supplémentaires.

NN. de la table générale.	CASE PREMIERE. *Analogies fondées sur l'art.* 332.			
11	R :	*sin* BC :: *sin* B :	*sin* AC
19	R :	*sin* BC :: *sin* C :	*sin* AB
29	*Sin* BC :	*sin* AC :: R :	*sin* B
8	*Sin* B :	*sin* AC :: R :	*sin* BC
27	*Sin* BC :	*sin* AB :: R :	*sin* C
14	*Sin* C :	*sin* AB :: R :	*sin* AB

344. *Démonstration des analogies de la case première.*

Les analogies 11 et 19 de la case précédente sont celles de l'article 332, ou plutôt l'énoncé de ce même article appliqué au triangle ABC (FIG. 131). Renversant 11, on a 29 et 8; renversant 19, on a 27 et 14.

NN. de la table générale.	CASE II. *Analogies fondées sur les art.* 332 *et* 334.			
22	R :	*cos* AB :: *cos* AC :	*cos* BC
25	*Cos* AB :	R :: *cos* BC :	*cos* AC
28	*Cos* AC :	*cos* BC :: R :	*cos* AB
18	R :	*cos* AC :: *sin* C :	*cos* B
9	*Cos* AC :	*cos* B :: R :	*sin* C
2	*Sin* C :	*cos* B :: R :	*cos* AC
6	R :	*cos* AB :: *sin* B :	*cos* C
15	*Cos* AB :	*cos* C :: R :	*sin* B
1	*Sin* B :	*cos* C :: R :	*cos* AB

345. *Démonstration des analogies de la case II.*

Dans le triangle complémentaire FCE (FIG. 131) rectangle en E, on a (332), R : *sin* FC :: *sin* CFE : *sin* CE. Or (334), FC = *cos* AC; *sin* CFE = *sin* AD = *cos* AB; *sin* CE

= *cos* BC; donc R : *cos* AC :: *cos* AB : *cos* BC; ou bien, R : *cos* AB :: *cos* AC : *cos* BC. C'est l'analogie 22 qui, en transposant, devient 25 et 28.

Dans le même triangle FCE, on a encore (332) R : *sin* FC = *sin* C : *sin* FE; ou bien, en substituant (334), R : *cos* AC :: *sin* C : *cos* B. C'est l'analogie 18 laquelle, en transposant, devient 9 et 2.

Dans le triangle complémentaire HIF, on a (332) R : *sin* HF :: *sin* F : *sin* HI. Mais (334) par la construction de la figure, HE = 90° et FD = 90°; donc HF = ED = B; d'ailleurs F = AD; donc *sin* F = *cos* AB, et *sin* HI = *cos* IG = *cos* C; donc, substituant, R : *sin* B :: *cos* AB : *cos* C; ou bien, R : *cos* AB :: *sin* B : *cos* C; et c'est l'analogie 6, laquelle, en transposant, devient 15 et 1.

CASE III.

Analogies fondées sur l'article 333.

NN. de la table générale.			
4	R :	*sin* AB :: *tang* B :	*tang* AC
16	R :	*sin* AC :: *tang* C :	*tang* AB
7	R :	*tang* AC :: *cot* B :	*sin* AB
13	R :	*tang* AB :: *cot* C :	*sin* AC

346. *Démonstration des analogies de la case III.*

Dans le triangle ABC (FIG. 130) rectangle en A, il vient (333) pour le côté AB, R : *sin* AB :: *tang* B : *tang* AC, et pour le côté AC, R : *sin* AC :: *tang* C : *tang* AB; ce sont les analogies 4 et 16.

En transposant dans 4, on a, *tang* B : R :: *tang* AC : *sin* AB. Or (288), *tang* B : R :: R : *cot* B; donc R : *cot* B :: *tang* AC : *sin* AB, ou bien R : *tang* AC :: *cot* B : *sin* AB, qui est l'analogie 7.

Renversant l'analogie 16, on a, *tang* C : R :: *tang* AB : *sin* AC; mais (288) *tang* C : R :: R : *cot* C. Donc R : *cot* C

:: *tang* AB : *sin* AC, ou bien R : *tang* AB :: *cot* C : *sin* AC; c'est l'analogie 13.

CASE IV.

nn. de la table générale.	*Analogies fondées sur les art.* 333 *et* 334.
5	R: *cot* AB :: *cos* B : *cot* BC
17	R: *cot* AC :: *cos* C : *cot* BC
21	R: *cos* BC :: *tang* C : *cot* B
12	R: *cos* BC :: *tang* B : *cot* C
20	R: *tang* BC :: *cos* C : *tang* AC
10	R: *tang* BC :: *cos* B : *tang* AB
24	R: *cot* AB :: *sin* AC : *cot* C
23	R: *sin* AB :: *cot* AC : *cot* B
26	R: *tang* AB :: *cot* BC : *cos* B
3	R: *cot* B :: *cot* C : *cos* BC
30	R: *tang* AC :: *cot* BC : *cos* C

347. *Démonstration des analogies de la case IV.*

Les deux analogies de l'article 336 deviennent, en transposant, les analogies 5 et 17.

De même celles de l'article 337 sont ici 21 et 12; et en transposant dans les deux de l'article 338, elles deviennent 20 et 10.

Par la transposition la première de l'article 339 devient 24, et la seconde est 23.

L'analogie 5 renversée se change en *cot* AB : R :: *cot* BC : *cos* B. Or (288) *cot* AB : R :: R : *tang* AB; donc R : *tang* AB :: *cot* BC : *cos* B; c'est l'analogie 26.

En renversant celle du n.° 21 on a, *tang* C : R :: *cot* B : *cos* BC. Or (288) *tang* C : R :: R : *cot* C. Donc R : *cot* C :: *cot* B : *cos* BC, ou bien R : *cot* B :: *cot* C : *cos* BC, c'est le n.° 3.

Enfin, transposant dans l'analogie 20, il vient, *tang* BC :

R :: *tang* AC : *cos* C. Or (288), *tang* BC : R :: R : *cot* BC; donc R : *cot* BC: *tang* AC : *cos* C; ou bien R : *tang* AC :. *cot* BC : *cos* C; et c'est le n.° 30.

Observation. Le calcul du triangle rectangle sphérique étant suffisant pour résoudre toutes les questions qui ont quelque rapport aux éléments d'astronomie, l'objet de cet ouvrage ne nous permet pas de porter nos recherches plus loin sur cette partie de la trigonométrie.

NOTIONS
ÉLÉMENTAIRES
SUR
LES SECTIONS CONIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

De la Théorie des lignes courbes en général.

548. Toutes les courbes qu'on peut décrire sur un plan, sont, ou *régulières* ou *irrégulières*. On appelle *régulières* celles qui sont décrites suivant une loi constante et uniforme; telle est, par exemple, la circonférence du cercle, qui est décrite suivant cette loi, que chacun de ses points est à égale distance du centre. Les courbes *irrégulières* sont celles qui ne sont assujetties à aucune loi, tels sont les traits qu'un écrivain trace au hasard sur le papier. Ces sortes de courbes ne sauraient être l'objet de la géométrie.

Descartes imagina le premier de déduire de la description d'une courbe régulière une équation indéterminée, qui exprimât la loi suivant laquelle la courbe est décrite, ou du moins qui en fût une conséquence nécessaire; et cette équation devant désigner une propriété qui convînt indistinctement à tous les points de la courbe, il l'appela *l'équation de la courbe*. Réciproquement, ayant une équation indéterminée quelconque, ce même géomètre chercha quelle était la courbe à laquelle elle appartenait, ou bien quelle était la loi, suivant laquelle il fallait décrire cette

courbe. Tout ce que nous allons dire ici présentera des exemples de cette double manière d'envisager les lignes courbes, qui passe, avec raison, pour une des plus heureuses découvertes qu'on ait faites en Mathématiques.

349. DÉFINITIONS. Soient les deux droites indéfinies Qq, Rr (FIG. 132.), qui se coupent en A, sous un angle quelconque (ici on le suppose droit, pour une plus grande facilité): qu'on prenne sur Qq la partie AC, que j'appelle a, avec laquelle, du point C, on décrira le cercle $AMBm$. Alors la ligne Rr sera appelée, relativement à cette courbe, *l'axe des ordonnées*, et Qq *l'axe des abscisses*. Le point A sera *l'origine* des abscisses et des ordonnées. Toute ligne comme MP, qui sera abaissée d'un point de la circonférence parallèlement à Rr, sera une *ordonnée*, et la partie AP sera son *abscisse*. Les ordonnées et les abscisses seront appelées, d'un nom commun, les *coordonnées*. Et par rapport à leurs situations opposées relativement à l'axe des abscisses, toutes les ordonnées qui seront au dessus de cet axe seront dites *positives*, et celles qui seront au dessous, seront dites *négatives*. Il en sera de même des abscisses relativement à l'axe des ordonnées; c'est-à-dire, que nous appellerons *positives*, celles qui sont à la droite, et *négatives* celles qui sont à la gauche de cet axe.

On est convenu que l'abscisse d'une courbe serait désignée par x, et l'ordonnée par y. Mais comme chaque point de la courbe a son abscisse et son ordonnée particulière, et que cependant on les désigne toutes indistinctement par x et par y, ces lettres expriment plutôt des indéterminées que des inconnues.

350. Cherchons présentement l'équation au cercle $AMBm$, dont le centre est en C, et dont le rayon AC est une quantité connue qu'on a prise à volonté sur Aq, et qu'on désigne par a; ce qui donnera, pour son diamètre AB, la quantité connue $2a$; d'ailleurs, puisque AP est appelée x, la distance PC de l'ordonnée au centre C sera né-

cessairement $a-x$, toutes les fois que cette ordonnée MP tombera entre l'origine A et le centre C ; et cette distance pC sera $x-a$, lorsque l'ordonnée mp tombera au-delà du centre relativement à l'origine A. En outre, en supposant, comme ici, les deux axes perpendiculaires, l'un à l'autre, on a pour un point quelconque M, un triangle rectangle tel que MPC, qui donne (174) $MP^2=CM^2-PC^2$. Or, MP est y, CM est a, PC est $a-x$ ou $x-a$, qui ont le même quarré. Donc $y^2=a^2-a^2+2ax-x^2=2ax-x^2=\overline{2a-x}\times x$; et comme $2a-x=BP$, et $x=AP$. L'équation précédente exprime *que pour un point quelconque de cette courbe, le quarré de l'ordonnée vaut le rectangle fait sur les deux segments correspondants du diamètre*, ou, ce qui est le même, *que la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la courbe sur le diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce diamètre*, ainsi que la géométrie nous l'avait enseigné plus haut (147).

351. Comme il est loisible de placer l'origine où l'on veut, on aurait pu la placer au centre C, et on aurait eu le même propriété exprimée en termes différents. Car alors $CP=x$, $AP=a-x$ et $BP=a+x$. Or, le triangle rectangle MPC donne, $\overline{MP^2}=\overline{MC^2}-\overline{CP^2}$, ou bien $y^2=a^2-x^2=\overline{a-x}\times\overline{a+x}$, ou $\div a-x:y:a+x$. Ce qui prouve encore *que la perpendiculaire* MP *est moyenne proportionnelle entre les deux segments du diamètre.*

352. Supposons maintenant qu'on s'occupe de l'opération qui est l'inverse de la précédente ; c'est-à-dire, qu'ayant l'équation indéterminée $yy=2ax-x^2$, on cherche la courbe à laquelle elle appartient. Pour y parvenir, on prendra d'abord dans cette équation la valeur de y, ce qui donne $y=\pm\sqrt{2ax-xx}$; ensuite on tracera les deux axes ou les deux droites indéfinies R r, Q q, (qu'on suppose toujours ici se couper à angles droits) ;

plaçant l'origine en A, on supposera que, du côté des abscisses positives, on fait x successivement égale à 0, + 1, + 2, + 3, + 4, + 5, + 6, + 7, + etc., ce qui donnera pour les valeurs correspondantes de y (en supposant que la quantité connue $2a = 6$) : 0, $\pm\sqrt{5}$, $\pm\sqrt{8}$, ± 3, $\pm\sqrt{8}$, $\pm\sqrt{5}$, ± 0; et au-delà de ce terme, c'est-à-dire, en supposant $x > 6$, toutes les valeurs de y seront imaginaires, puisque dans l'équation $y = \pm\sqrt{2ax - xx}$, le terme négatif x^2 sera plus grand que le positif $2ax$.

Cherchant ensuite les valeurs des y du côté des x négatives, c'est-à-dire, en supposant celles-ci successivement égales à 0, — 1, — 2, — 3, etc. on verra que la première est 0, et que toutes les autres sont imaginaires, puisque x étant négative, le terme $2ax$ devient nécessairement négatif dans l'équation $y = \sqrt{2ax - xx}$; et de tout cela on conclura :

353. 1.° *Que la courbe dont l'équation est* $y^2 = 2ax - xx$, *passe par l'origine* A; puisque en supposant $x = 0$, on a $y = 0$; et qu'il n'y a évidemment d'autre point que l'origine qui puisse correspondre à la fois à une abscisse 0 et à une ordonnée 0.

354. 2.° *Que cette courbe ne s'étend point du côté des abscisses négatives ;* puisque les ordonnées étant toutes imaginaires de ce côté, aucune ligne ne saurait en exprimer la valeur.

355. 3.° *Que du côté des abscisses positives, la courbe s'écarte d'abord également de l'axe des abscisses, tant en dessus qu'en dessous ;* puisque à chaque valeur positive de x, répondent d'abord deux ordonnées égales et croissantes, l'une positive, l'autre négative, savoir; 0, $\pm\sqrt{5}$, $\pm\sqrt{8}$, ± 3; qu'elle s'en approche ensuite dans le même ordre ; puisque ses ordonnées décroissent également, en devenant ± 3, $\pm\sqrt{8}$, $\pm\sqrt{5}$, 0; et qu'enfin l'ordonnée redevient 0, ou bien que la courbe rencontre encore l'axe des abscisses, lorsqu'on fait $x = 2a = 6$.

356. 4.° *Que la courbe en question ne s'étend pas au-delà du point où l'abscisse vaut* 2 a *ou* 6; puisque faisant $x > 2a$, la valeur de y est imaginaire dans l'équation $y = \sqrt{2ax - xx}$; et qu'ainsi la courbe est *rentrante*.

357. 5.° Enfin, *que là où l'abscisse est supposée* $= 3$, *ou bien* $=$ a, *la double ordonnée devient* ± 3; *c'est-à-dire, la plus grande de toutes, et égale à l'abscisse;* d'où l'on voit que si on prend AB $= 2a$ et AC $= a$, la courbe en question s'écartera également du point C, tant au dessus qu'au dessous de AB, et tant à la droite qu'à la gauche de ce même point; et qu'ainsi sa courbure est parfaitement uniforme en tout sens. Faisant donc passer une courbe par les points A et B, et par les extrémités des ordonnées (qu'on peut supposer plus rapprochées pour la tracer plus exactement), on verra qu'elle n'est autre chose que le cercle AMBm, dont le centre est en C, et dont le diamètre est AB.

358. Remarque. Dès qu'on suppose les ordonnées MP, mp (fig. 132), perpendiculaires aux abscisses, chaque ordonnée exprime la distance d'un point de la courbe M ou m, à l'axe des abscisses; et réciproquement chaque abscisse AP, Ap, exprime les distances de ces mêmes points M et m à l'axe des ordonnées; puisque les perpendiculaires MN, mn, sur l'axe des ordonnées Rr, mesurent ces distances, et qu'elles sont égales à AP et Ap. D'où l'on conclura :

359. 1.° *Que si l'équation d'une courbe est telle, qu'en supposant une certaine valeur à* x, *on rende* y $=$ o, *la courbe rencontrera l'axe des abscisses à une distance de l'origine, égale à cette abscisse;* et réciproquement, s'il y a une valeur de y, qui rende $x = o$, la courbe rencontrera l'axe des ordonnées à une distance de l'origine, exprimée par cette ordonnée.

360 2.° *Que s'il n'y a aucun terme constant* (*) *dans l'équation d'une courbe, elle passe par l'origine*; puisque alors x devenant 0, y devient 0. Mais s'il y en a un, elle n'y passe pas; puisque, dans ce cas, la supposition de $x=0$, ne rend point y égale à 0. Aussi avons-nous vu plus haut (350), que quand on prend pour l'équation au cercle $yy=2ax-xx$, l'origine est dans un point de la circonférence; et que quand on a pour cette équation $y^2=a^2-x^2$, l'origine est au centre (351).

361. DÉFINITIONS I. *On appelle* sommets *d'une courbe, tous les points où cette courbe coupe l'axe des abscisses.* De façon qu'à l'inspection de l'équation, on voit, 1.° si la courbe a des sommets; 2.° combien elle en a; 3.° que celles dont l'équation est du second degré, n'en peuvent avoir plus de deux.

362. II. *Les lignes sont distinguées en divers ordres, suivant les différents degrés de l'équation qui en exprime la nature.* Ainsi l'équation $ay+bx+c=0$, exprime une ligne du premier ordre, c'est la ligne droite; $y^2-2ax+xx=0$, exprime une ligne du second ordre, c'est le cercle, etc.

363. Soit l'équation du second degré $xy=a$, qui donne $y=\frac{a}{x}$: supposons que sur l'axe des abscisses et du côté des x positives, on prenne (FIG. 133) $AT=a=1$, $AS=2$, $AO=3$, et ainsi de suite pour les autres abscisses. D'après cette supposition, les valeurs correspondantes des ordonnées TM, SM, OM, etc. seront 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc. jusqu'à l'infini; de façon que les y diminuant toujours à proportion que les x positives augmentent, la courbe jettera une branche infinie, qui, de ce côté, s'approchera toujours de l'axe des abscisses, sans jamais le rencontrer.

Supposons présentement que prenant les x toujours

(*) On entend par *terme constant* celui où les variables x ou y, n'entrent pas.

positives, on leur donne différentes valeurs au dessous de l'unité ou de AT, et qu'on les fasse $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc.; alors les ordonnées correspondantes, toutes placées entre A et T, seront $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ ou 2, $\frac{1}{\frac{1}{3}}$ ou 3, $\frac{1}{\frac{1}{4}}$ ou 4, etc. ainsi de suite toujours en croissant, jusqu'à l'infini, à proportion que les abscisses décroîtront. La branche de la courbe où elles se termineront, s'étendra donc à l'infini le long de l'axe AR des ordonnées, et ne rencontrera jamais cet axe, ou bien ne le rencontrera qu'à une distance infinie de l'origine. Par conséquent, cette courbe jettera deux branches infinies dans l'angle RA*q* des coordonnées positives. Si l'on suppose les x négatives, il est clair qu'alors l'équation $y = \frac{a}{-x}$, rend les ordonnées négatives, et qu'ainsi cette même courbe étend encore deux branches parfaitement semblables dans l'angle QA*r* des coordonnées négatives; et comme ces deux parties sont désignées par une seule équation irréductible $xy = a$, elles appartiennent à une seule et même courbe, appelée *hyperbole*.

364. Corollaire. D'après l'équation de l'hyperbole, on doit donc conclure; 1.° *que cette courbe ne passe pas à l'origine*; car $xy = a$, ou $xy - a = 0$, a un terme constant (360); 2.° *qu'elle n'a pas de sommets*, ou, ce qui est le même, qu'elle ne les a qu'à une distance infinie de l'origine; car pour avoir $y = 0$, il faut dans l'équation $y = \frac{a}{x}$, supposer x infinie; 3.° *Que les ordonnées sont en raison réciproque de leurs abscisses*; car appelant une abscisse X et son ordonnée Y, une autre quelconque x et son ordonnée y, on a $XY = a = xy$, ou bien $X : x :: y : Y$.

365. Définition. *On appelle* asymptote rectiligne *d'une courbe, toute ligne droite de laquelle cette courbe s'approche toujours sans jamais l'atteindre.* Ainsi dans l'hyperbole les deux axes R*r*, Q*q*, sont ses deux asymptotes rectilignes.

366. Remarque. Outre la courbe du second degré, dont nous venons de parler, les géomètres ont donné le nom

d'hyperbole à toutes celles, dont l'équation est renfermée dans cette expression générale $y^m x^n = a$, ou $y^m = \frac{a}{x^n}$, quels que soient les nombres entiers que désignent m et n; et ils appellent cette espèce de courbes *la famille des hyperboles*. Si $m = n = 1$, on a $yx = a$, et c'est l'hyperbole du second degré, dont nous venons de parler : si $m = 2$ et $n = 1$, on a $y^2 x = a$, et c'est l'hyperbole du troisième degré, ou cubique; si $m = 2$ et $n = 2$, il vient $x^2 y^2 = a$, et c'est l'hyperbole du quatrième degré, etc.

367. Soit encore proposé de trouver la courbe dont l'équation est $y^2 = px$. Pour cela, je fais la quantité connue $p = 1$, et je donne à x, du côté positif, les valeurs successives 0, 1, 2, 3, 4. . . . Les ordonnées qui en résulteront seront 0, ± 1, $\pm \sqrt{2}$, $\pm \sqrt{3}$, $\pm \sqrt{4}$. . . . Et je vois que p étant positif, la courbe manque du côté des x négatives, puisque px devient alors négatif, et que l'équation se changeant en $yy = -px$, toutes les valeurs des y sont imaginaires. D'où je conclus, 1.° *que si l'on prend le point* A (FIG. 134) *pour l'origine, la courbe passera par ce point;* puisque l'équation n'a pas de terme constant; ou bien que $x = 0$ donne $y = 0$. 2.° *qu'elle n'a que ce seul sommet*; puisqu'il n'y a qu'une $x = 0$ qui puisse donner $y = 0$; 3.° *qu'elle a deux branches infinies et égales* AM, Am, *qui s'étendent et s'éloignent toujours, et également des abscisses positives, sans reparaître du côté des abscisses négatives;* et qu'ainsi la courbe n'est pas rentrante; 4.° *que ces branches s'écartent moins de l'axe des abscisses, que de celui des ordonnées*; car la distance de chaque point M ou m, à l'axe des ordonnées, est exprimée par la perpendiculaire MN, ou son égale AP, qui est x; tandis que la distance de ce point à l'axe des abscisses, est exprimée par MP ou y, qui vaut $\sqrt{x}$; 5.° *que ses axes ne peuvent* point lui servir d'asymptotes, puisque, loin de s'en approcher, elle s'en éloigne toujours.

368. REMARQUE. La courbe dont nous venons de parler,

est celle qu'on nomme *parabole*. C'est sous cette même dénomination qu'on a renfermé toutes les courbes, dont l'équation se présente sous cette forme générale, $y^m = p^{m-1} x$, qui représente l'entière *famille des paraboles*. Quand $m = 2$, l'équation est $y^2 = p x$, et c'est la parabole simple et ordinaire; quand $m = 3$, l'équation $y^3 = p^2 x$, représente la parabole cubique, etc.

CHAPITRE II.

De l'Ellipse.

369. DÉFINITION. Si l'on suppose que sur un plan quelconque, on prenne à volonté deux points fixes F, *f*, (FIG. 135), dont on connaît l'éloignement, et qu'on décrive une courbe AMB*a b*, en suivant cette loi : *qu'à chaque pas du point générateur la somme de ses deux distances aux deux points fixes* F, f, *soit toujours la même et égale à une ligne donnée* 2 a; la courbe ainsi formée sera une *Ellipse*.

370. COROLLAIRE. 1.° D'après cette génération, il est aisé de décrire cette courbe par un mouvement continu. Car prenant un fil flexible, dont la longueur ne varie pas et soit égale à la ligne connue 2 *a*, fixant ses deux extrémités en F et *f*, si on le tient toujours également tendu avec un style, la pointe de ce style décrira la courbe en question; puisque la somme des deux distances de chaque point de la courbe aux deux points fixes F, *f*, vaudra toujours la longueur entière du fil, ou 2 *a*.

371. 2.° Si, sur le point C, qui tient le milieu entre F et *f*, on élève la perpendiculaire B*b*, jusqu'à la rencontre de la courbe, *cette perpendiculaire sera une ligne connue, de cela seul qu'on connaît* F*f*. Car alors FB = *f* B = *a*.

Donc dans le triangle rectangle BCF, on aura BC $= \sqrt{a^2 - (CF)^2}$; par conséquent $Bb = 2\sqrt{a^2 - (CF)^2}$.

372. 3.° *Qand la courbe passera sur la ligne, qui joint les points* F *et* f, *elle sera à distances égales de ces deux points, ou bien on aura,* FA $= fa$. Car $2a = FA + fA = Fa + fa$. Or, $fA = fF + FA$, et $Fa = Ff + fa$. On aura donc $FA + fF + FA = fF + fa + fa$; ou bien, en réduisant, $2FA = 2fa$, et enfin $FA = fa$.

D'où l'on conclura *que la ligne* Aa, *qui traverse la courbe en passant par les points* F, f, *est égale à la ligne donnée* 2a. Car $Fa + fa = 2a$, par la nature de la courbe. Or, $fa = FA$. Donc $Fa + FA$ ou $Aa = 2a$.

373. DÉFINITION II. La ligne connue Aa s'appelle le *grand axe* de l'ellipse, je la fais $= 2a$; la ligne Bb perpendiculaire sur le milieu du grand axe, s'appelle le *petit axe*, et comme elle est connue (371), je la fais $= 2b$; les points fixes F, *f*, sont les *foyers*; A, *a*, sont les *sommets*; C est le *centre*. La distance connue F*f* des deux foyers est *l'excentricité* que je fais $= 2c$, et partant FC ou $fC = c$. On appelle *rayon vecteur* une droite *f*M ou FM, menée d'un foyer sur un point de la courbe; ce qui fait que chaque point de la courbe se rapporte à deux rayons vecteurs. Supposons qu'on place l'origine des coordonnées au centre C, de façon que $CP = x$ et $PM = y$; alors $fP = c + x$ et $FP = c - x$.

374. Avant de passer plus loin, il faut remarquer que le point B étant autant éloigné de F que de *f*, on doit avoir $BF = a$, tandis que $BC = b$, et $CF = c$. Donc dans le triangle rectangle BCF, $\overline{BC}^2 = \overline{BF}^2 - \overline{CF}^2$, ou bien $b^2 = a^2 - c^2$. Donc $\div\div a + c : b : a - c$. Or, $a + c = Fa$, et $a - c = FA$. Donc *le demi-petit axe est moyen proportionnel entre les distances d'un des foyers aux deux sommets.*

375. Pour trouver l'équation à l'ellipse, il faut se souvenir que pour un point quelconque M, la somme des deux

deux rayons vecteurs est $2a$; donc si je fais leur différence $= 2z$, le plus grand $fM = a + z$, et le plus petit $FM = a - z$.

Cela posé, dans les triangles rectangles MPF, MPf, on a $\overline{FM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{FP}^2$, et $\overline{fM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{fP}^2$, ou bien exprimant l'une et l'autre équation analytiquement :

$$a^2 - 2az + z^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2.$$
$$a^2 + 2az + z^2 = y^2 + c^2 + 2cx + x^2.$$

Si l'on soustrait la première équation de la seconde, il reste $4az = 4cx$, donc $z = \frac{cx}{a}$.

Substituons cette valeur de z dans la première équation, et elle devient, $a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$. Donc $y^2 = a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}$. Or, $a^2 - c^2 = b^2$ (374); et $-x^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = \frac{-a^2x^2 + c^2x^2}{a^2} = \frac{-x^2(a^2 - c^2)}{a^2}$ $= \frac{-b^2x^2}{a^2}$. Donc $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Or, $a^2 - x^2 = \overline{a + x} \times \overline{a - x} = aP \times AP$. Ainsi dans cette courbe *le quarré de l'ordonnée est égal au rectangle des abscisses, multiplié par une fraction dont le numérateur est le quarré du demi-petit axe, et le dénominateur est le quarré du demi-grand axe.*

376. Remarque. Si l'on avait placé l'origine en A, et qu'on eût fait $AP = z$, on aurait $x = a - z$. Donc en substituant cette valeur dans l'équation trouvée $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, il viendrait, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - a^2 + 2az - z^2)$ $= \frac{b^2}{a^2}(2az - z^2) = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{2a - z} \times z$, qui exprime la même propriété d'une façon analogue à ce que nous avons

dans le cercle, en comptant les abscisses, tantôt du ntre, tantôt du sommet.

377. COROLLAIRE. Concluons de là, 1.° que l'équation ule de cette courbe désigne, *qu'elle a deux branches ales de chaque côté de l'axe des abscisses*, puisque y a ujours deux valeurs égales.

378. 2.° Qu'en plaçant l'origine en A, *elle coupe l'axe à rigine et à la distance de l'origine* $= 2a$. Car alors y de- ent o, en supposant $z = o$, et en supposant $z = 2a$.

379. 3.° Que si l'on faisait $b = a$, alors l'équation de tte courbe deviendrait $y^2 = a^2 - x^2$, qui est la même e celle du cercle. Or, $b = a$, suppose $c = o$; puisqu'on oujours (374) $b^2 = a^2 - c^2$. Donc *un cercle peut être con- léré comme une ellipse, dont l'excentricité est nulle.*

380. De ce que $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, il s'ensuit que l'on a tte proportion $y^2 : a^2 - x^2 :: b^2 : a^2$, c'est-à-dire, *que le arré de l'ordonnée est au rectangle des abscisses, comme quarré du demi-petit axe est au quarré du demi-grand axe.*

381. 4.° Si l'on décrit un cercle sur le grand axe de l'ellipse, qu'on place pour l'un et l'autre l'origine au sommet (FIG. 135.), on aura pour l'ordonnée du cercle $Y^2 = 2ax - x^2$; et pour l'ordonnée correspondante dans l'ellipse, $= \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$. Donc mettant le tout en proportion, $: y^2 :: 2ax - x^2 : \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) :: 1 : \frac{b^2}{a^2} :: a^2 : b^2$. Donc $: y :: a : b$. Or, appelant V et v deux autres ordonnées cor- spondantes dans le même cercle et dans la même el- se, on aurait également $V : v :: a : b$. Donc $Y : y :: V : v$, c'est- dire, *que les ordonnées de l'ellipse sont proportionnelles x ordonnées correspondantes dans le cercle circonscrit.* Ce i prouve que, pour décrire une ellipse, il suffirait de di- er proportionnellement toutes les ordonnées d'un cer- , et de faire passer la courbe par les points de division.

382. DÉFINITION III. On appelle *paramètre*; dans une section conique, la double ordonnée qui passe par le foyer; et comme on emploie souvent son expression, nous allons en chercher la valeur dans l'ellipse.

383. Pour la trouver, je remarque que l'abscisse qui répond à cette ordonnée, est $a-c$; mettant donc cette valeur à la place de x dans l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$, j'ai $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2a \times \overline{a-c} - \overline{a-c}^2) = \frac{b^2}{a^2}(2a^2 - 2ac - a^2 + 2ac - c^2) = \frac{b^2}{a^2}(a^2-c^2)$. Et comme $b^2 = a^2-c^2$, on a $y^2 = \frac{(a^2-c^2)^2}{a^2}$. Donc $y = \frac{a^2-c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$ (374); ou bien $2y = \frac{4b^2}{2a}$; c'est-à-dire, *que le paramètre vaut le quarré du petit axe divisé par le grand axe*, ou bien encore, *qu'il est une troisième proportionnelle au grand et au petit axe*, puisque faisant $2y = p$, on a $\div\div 2a : 2b : p$. D'où il suit qu'en considérant le cercle comme une ellipse, dont l'excentricité est nulle, *le paramètre du cercle est un diamètre.*

384. Il est maintenant aisé de faire entrer le paramètre dans l'équation à l'ellipse. Car puisque $p = \frac{2b^2}{a}$, on a $b^2 = \frac{1}{2}ap$. Substituant donc à la place de b^2 dans la première équation à l'ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, on a $y^2 = \frac{p}{2a}(a^2-x^2)$, ou bien $y^2 = \frac{1}{2}ap - \frac{px^2}{2a}$.

Si l'on substitue à la place de b^2 dans la seconde équation à l'ellipse, qui est $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$ on aura $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax-x^2) = px - \frac{px^2}{2a}$.

385. De l'expression du paramètre, il s'ensuit, que dans cette courbe, *il est plus petit que la quadruple distance du*

sommet au foyer voisin. Car appelant cette distance d, on a $d = a - c$, tandis que $p = \frac{2b^2}{a} = \frac{2a^2 - 2c^2}{a}$ (374). Donc $p : d :: \frac{2(a^2 - c^2)}{a} : a - c :: \frac{2(a+c)}{a} : 1 :: 2a + 2c : a$. Donc $p : 4d :: 2a + 2c : 4a$. Or, $2a + 2c < 4a$, puisque $2c < 2a$ (473). Donc $p < 4d$.

386. REMARQUE. L'équation à l'ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, qui est venue en comptant les coupées du centre, nous donne l'équation au petit axe. Car dans le parallélogramme des coordonnées CPMD, CD = MP, et DM = CP. Donc *l'ordonnée du petit axe est l'abscisse du grand, et l'abscisse du petit est l'ordonnée du grand.* Ainsi appelant pour le petit axe l'ordonnée x et l'abscisse y, on a, $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$. Ce qui prouve, 1.° *que les propriétés de l'ellipse, rapportée à son petit axe, sont les mêmes que celles de la même courbe, rapportée au grand axe ;* 2.° *qu'ainsi, si l'on décrit un cercle sur le petit axe, ses ordonnées seront proportionnelles à celles qui leur correspondront dans le petit axe.*

387. COROLLAIRE. *La surface de l'ellipse est donc moyenne proportionnelle entre celle du cercle inscrit et celle du cercle circonscrit.* Car appelant la surface du cercle circonscrit C, celle de l'inscrit c, et celle de l'ellipse E, on observera (381) que si l'on désigne par Y l'ordonnée du cercle circonscrit, et par y celle correspondante dans l'ellipse, il vient pour chaque point de l'une et de l'autre courbe, $Y : y :: a : b$. Donc, puisqu'il y a autant d'ordonnées dans le quart de cercle circonscrit que dans le quart d'ellipse, la somme des premières sera à la somme des secondes (alg. 235) $:: a : b$. Or, la somme des premières peut être considérée comme remplissant le quart du cercle circonscrit, et celle des secondes comme remplissant le quart de l'ellipse. Donc il viendra $C : E :: a : b$. Par un raisonnement semblable, on trouvera pour le cercle inscrit $E : c :: a : b$. Par conséquent $\div C : E . c$.

388. D'où il suit que $E^2 = Cc$. Appelant S la surface d'une autre ellipse, D et d les cercles circonscrits et inscrits, on aurait $S^2 = Dd$. Donc $E^2 : S^2 :: Cc : Dd$. Or, si l'on désigne les deux demi-axes de la première ellipse par A et par B, les deux demi-axes de la seconde par a et par b, les deux cercles circonscrits auront pour rayons A, a; et les deux inscrits, B, b. Donc on aura (178) $C : D :: A^2 : a^2$ et $c : d :: B^2 : b^2$. Par conséquent (*alg.* 237), $Cc : D\,d :: A^2 B^2 : a^2 b^2$. Donc $E^2 : S^2 :: A^2 B^2 : a^2 b^2$, ou $E : S :: AB : ab$, c'est-à-dire, *que les surfaces de deux ellipses, qu'on compare, sont entre elles en raison composée de leurs axes.*

CHAPITRE III.

De l'Hyperbole.

389. DÉFINITION. Supposons que sur une droite indéfinie $Q\,q$ (FIG. 136), on prenne deux points fixes F, f; et que sur le plan qui contient cette ligne, on prenne une infinité de points, comme M, tels que la différence des distances de chacun aux deux points fixes F, f, soit toujours la même, et égale à une ligne droite donnée, que j'appelle $2a$; alors la courbe DAE, qui passera par tous ces points, sera une *hyperbole*, et les points F, f, en seront les *foyers*.

390. Pour décrire une hyperbole par un mouvement continu, il ne faut donc que fixer l'extrémité d'une règle à un point f, qui sera un foyer, autour duquel elle puisse tourner; avoir un fil flexible GMF, plus ou moins long que la règle fG, dont un bout sera attaché en G et l'autre en F, et par un style M, tenir une portion du fil MG, appliquée à la règle, tandis que celle-ci tourne sur le point f. Alors la différence des distances du style aux deux

foyers, sera toujours la même et vaudra la différence qu'il y a entre la longueur du fil et celle de la règle.

Si, après avoir décrit la branche DMA, on renverse la règle, le style tracera la branche AE, parfaitement semblable à la précédente; et si on fixe de la même manière l'extrémité de la règle en F, et qu'on attache le bout du fil en *f*, on tracera la courbe *d a e*, tout-à-fait semblable à DAE, et qui tournera sa convexité vers la première. Ces deux courbes s'appellent *les hyperboles opposées*.

391. COROLLAIRE. D'après la génération de cette courbe, on peut conclure; 1.° *qu'elle coupera la ligne indéfinie* Q *q*, *dans deux points* A *et* a, *qui seront entre les deux foyers*. (Ces points en sont appelés les *sommets*).

392. 2.° *Que les deux sommets* A, a, *sont également éloignés des deux foyers* F, *f*; ou bien que FA = *fa*. Car, par la nature de la courbe, on a, *f* A — FA = 2 *a* = F *a* — *fa*. Donc retranchant de *f* A et de F *a* la partie commune A *a*, on a *fa* — FA = FA — *fa*. Donc 2 *fa* = 2 FA, ou *fa* = FA.

393. Il suit de là *que la distance des sommets* A, a, *vaut la quantité connue* 2 *a*. Car *f* A — FA = 2 *a*, ou bien *fa* + *a* A — FA = 2 *a*. Or *fa* = FA; donc A *a* = 2 *a*. (La ligne A *a*, qui joint les deux sommets, est appelée *le premier axe* des hyperboles, et le point du milieu C en est le *centre*).

394. Si sur le milieu C du premier axe, on élève la perpendiculaire B *b*, terminée aux points B, *b*, en portant de A les lignes AB, A *b*, égales à la demi-excentricité FC, cette perpendiculaire sera appelée le *second axe* des hyperboles opposées. Et comme ce second axe est nécessairement une quantité connue, dès qu'on connaît BA et CA, nous l'appellerons 2 *b*. Ici, comme dans l'ellipse, l'excentricité F *f* est appelée 2 *c*, l'ordonnée PM est *y*; et plaçant l'origine des abscisses au centre, CP sera *x*. Donc PF = *c* — *x*, et P *f* = *c* + *x*.

395. THÉORÈME I. *Dans cette courbe le second demi-axe*

est moyen proportionnel entre les distances d'un même foyer aux deux sommets.

DÉMONSTRATION. Il faut démontrer que $\div$ FA:BC:Fa; ou bien que $\div$ $c-a:b:c+a$. Or, cela est ainsi; car le triangle rectangle BCA donne $\overline{BC}^2=\overline{BA}^2-\overline{CA}^2$, ou bien $bb=cc-aa$. Donc $\div$ $c-a:b:c+a$.

396. THÉORÈME. II. *Dans cette courbe le quarré d'une ordonnée vaut le rectangle de ses abscisses, multiplié par une fraction dont le numérateur est* b², *et dont le dénominateur est* a^2.

DÉMONSTRATION. Puisqu'ici la différence des deux rayons vecteurs est toujours $2a$, appelant leur somme $2z$, le plus grand sera $z+a$, et le plus petit $z-a$.

Cela posé, dans les triangles rectangles MPF, MPf (FIG. 137), on a $\overline{MF}^2=\overline{MP}^2+\overline{PF}^2$, et $\overline{Mf}^2=\overline{MP}^2+\overline{Pf}^2$. Donc substituant les expressions algébriques, on a :

$$zz-2az+aa=yy+cc-2cx+xx$$
$$zz+2az+aa=yy+cc+2cx+xx$$

Soustrayant la première équation de la seconde, $4az=4cx$, ou $z=\frac{cx}{a}$ et $zz=\frac{ccxx}{aa}$. Substituant ces valeurs de z et de z^2 dans la première équation, on a : $\frac{ccxx}{aa}-2cx+aa=yy+cc-2cx+xx$. Donc $yy=\frac{ccxx}{aa}-xx-cc+aa=\frac{ccxx-aaxx}{aa}-(cc-aa)=\ldots=\frac{(cc-aa)xx-aa(cc-aa)}{aa}$. Or, $cc-aa=bb$. Donc $yy=\frac{bbxx-aabb}{aa}=\frac{bb}{aa}(xx-aa)$.

397. REMARQUES I. Si l'on place l'origine en A, et qu'on fasse $AP=z$, on aura $x=a+z$; substituant cette va-

leur dans l'équation précédente, on a, $yy = \frac{bb}{aa}(aa + 2az + zz - aa) = \frac{bb}{aa}(2az + zz)$; ce qui exprime toujours la même propriété. Mais en examinant cette équation $yy = \frac{bb}{aa}(2az + zz)$, on en peut déduire, 1.° *que du côté des* x *positives chaque ordonnée a deux valeurs*, savoir $\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2}(2az + zz)\right)}$, et que cette courbe jette deux branches de chaque côté de ces abscisses; 2.° *que du côté des abscisses négatives, la courbe disparaît, tant que* z *est plus petit ou égal à* $2a$. Car alors $yy = \frac{bb}{aa}(2az + zz)$ devient $yy = \frac{bb}{aa}(-2az + zz)$; et par conséquent le second membre est négatif, tant que $2az > zz$; ou bien tant que $2a > z$. Donc alors les valeurs de y sont imaginaires. Mais si $2a = z$, on a $y = 0$; ce qui exprime que du côté des x négatives, la courbe va couper l'axe des abscisses à la distance de l'origine $= 2a$. Si $z > 2a$, $2az < zz$. Donc la courbe reparaît au-delà de ce point, et elle a deux branches, une de chaque côté de l'axe; ce qui prouve que *les deux hyperboles opposées sont une même courbe partagée en deux parties séparées par le premier axe*, puisque une même équation les représente toutes deux.

398. II. Si l'on supposait que dans l'hyperbole le second axe fût égal au premier, ou bien que $b = a$, l'équation, en comptant les abscisses du sommet, serait $yy = 2az + zz$; et par conséquent *elle ne différerait de celle du cercle* 350), *que par le signe qui précède le quarré* zz, *lequel est ici positif, tandis que dans le cercle il est négatif* (l'hyperbole dans laquelle le second axe égale le premier, s'appelle *hyperbole équilatère*).

399. III. Enfin il faut observer que, soit qu'on prenne l'équation de l'hyperbole du centre, soit qu'on la prenne du sommet, elle ne diffère de celle de l'ellipse que par les

signes, et que l'une et l'autre sont renfermées dans cette expression, $yy = \frac{bb}{aa}(\pm aa \mp xx)$: ou dans celle-ci, $yy = \frac{bb}{aa}(2ax \mp xx)$.

400. On appelle *paramètre*, dans l'hyperbole, la double ordonnée qui passe par le foyer. Pour avoir la valeur de cette ordonnée, on observera qu'alors, en comptant du centre, $x = c$; donc $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$ devient $yy = \frac{bb}{aa}(cc - aa)$. Or, $cc - aa = bb$. Donc $yy = \frac{b^4}{aa}$ et $y = \frac{bb}{a}$; Ainsi $2y = \frac{4bb}{2a}$. Donc appelant le paramètre p, j'ai $p = \frac{4bb}{2a}$, ou bien $\div\div 2a : 2b : p$.

401. Si l'on veut faire entrer le paramètre dans l'équation à la courbe, on sait que $p = \frac{4bb}{2a}$, et qu'ainsi $2ap = 4bb$, et $\frac{1}{2}ap = bb$. Substituant donc cette valeur pour bb dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, on a $yy = \frac{p}{2a}(xx - aa)$; et si l'on comptait les abscisses du sommet, on aurait eu, $yy = \frac{p}{2a}(2az + zz)$.

402. THÉORÈME III. *Dans l'hyperbole le paramètre est plus grand que le quadruple de la distance du sommet au foyer, ou bien*, $p > 4(c - a)$.

DÉMONSTRATION. Car $p = \frac{2bb}{a} = \frac{2(cc - aa)}{a} = \frac{4 \times 2(c+a)(c-a)}{4a}$. Donc $p : 4(c-a) :: 2(c+a) : 4a$. Or, $2(c+a)$, ou $2c + 2a > 4a$. Donc $p > 4(c-a)$.

403. REMARQUES I. L'équation $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, que nous avons trouvée en comptant les abscisses du

centre, nous donne l'équation au second axe. Car ici, comme dans l'ellipse (386), x représente l'ordonnée au second axe, et y son abscisse. Or, $xx = \frac{aa}{bb}(yy + bb)$; équation bien différente de celle du premier axe, puisque $yy + bb$ ne peut point représenter le rectangle des abscises.

404 II. Si l'on prend sur le second axe Bb (FIG. 137) deux points F', f', tels que CF' = Cf' = BA, on pourra', de ces deux points pris pour foyers, décrire deux hyperboles (*) opposées DBG, dbg, qui auront Bb pour premier axe et Aa pour second axe. Il est clair que l'on a dans ces deux courbes les mêmes propriétés que dans les deux premières, en changeant seulement b en a, et a en b. Ainsi, puisque en faisant CP = x, nous avons eu $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, ou $\overline{PM}^2 = \frac{bb}{aa}(\overline{CP}^2 - aa)$, il s'ensuit qu'en faisant CS = x, nous aurons $\overline{DS}^2 = \frac{aa}{bb}(\overline{CS}^2 - bb)$; d'où $\overline{CS}^2 = \frac{bb}{aa}(\overline{DS}^2 + aa)$. (La première de ces deux équations est celle du premier axe Bb des nouvelles hyperboles, et la dernière est pour leur second axe Aa).

405 III. Les calculs nécessaires pour trouver les expressions de certaines lignes dans l'ellipse et l'hyperbole, peuvent se faire de la même manière. C'est pourquoi nous emploierons, pour les démonstrations suivantes, deux figures de ces courbes, que nous construirons semblablement. Lorsque les résultats, ou quelques-uns de leurs termes, auront un signe double $\pm$ ou $\mp$, il faudra prendre le signe supérieur pour l'ellipse, et l'inférieur pour l'hyperbole.

(*) Ces hyperboles sont appelées les *hyperboles conjuguées* aux deux autres, et réciproquement.

406. THÉORÈME IV. *L'expression du petit rayon vecteur* FM (FIG. 135 et 137) *est*, $FM = \frac{\pm a^2 \mp cx}{a}$; *celle du grand rayon vecteur* fM *est*, $fM = \frac{aa + cx}{a}$ (l'origine étant au centre comme nous la supposerons dans la suite).

DÉMONSTRATION. Nous avons vu (375), 1.° que dans l'ellipse $FM = a - z$, et $fM = a + z$; 2.° que $z = \frac{cx}{a}$; (il en est de même pour l'hyperbole (396) avec les changements de signe, c'est-à-dire, que $FM = -a + z$, et $fM = a + z$). Donc en réunissant les deux courbes $FM = \pm a \mp z = \pm a \mp \frac{cx}{a} = \frac{\pm aa \mp cx}{a}$. De même $fM = \frac{aa + cx}{a}$.

407. DÉFINITION. *La sous-tangente* dans ces courbes est la partie PT du premier axe, comprise entre l'ordonnée MP, et la tangente TM.

408. THÉORÈME V. *Dans l'ellipse et dans l'hyperbole l'expression de la sous-tangente* PT, *est* $PT = \frac{\pm aa \mp xx}{x}$.

DÉMONSTRATION (*). Soit M*m* l'élément dont le prolongement forme la tangente MT : de ses extrémités menons les ordonnées MP, *mp* ; tirons de plus la petite droite M*r* parallèle à l'axe A*a*. Les triangles semblables M*mr*, TMP, donneront, $mr : Mr :: MP : PT$. Or, (399) $\overline{pm^2} = \frac{bb}{aa}(\pm aa \mp \overline{Cp^2})$, ou à cause de $pm = PM + mr$, et de $Cp = CP \mp Mr$, $\overline{PM^2} + 2\,PM \times mr + \overline{mr^2} = \frac{bb}{aa}(\pm aa \mp \overline{CP^2} + 2\,CP \times Mr \mp \overline{Mr^2})$. Négligeant $\overline{mr^2}$, $\overline{Mr^2}$, et ayant d'ailleurs $\overline{PM^2} = \frac{bb}{aa}(\pm aa \mp \overline{CP^2})$, il

(*) Pour rendre la démonstration plus courte et plus facile, on a fait usage ici des principes du calcul infinitésimal, d'après lesquels

vient $2PM \times mr = \frac{bb}{aa} \times 2CP \times Mr$, qui donne $mr : Mr :: \frac{bb}{aa} CP : PM$. Donc aussi $\frac{bb}{aa} CP : PM :: PM : PT = \frac{(PM)^2}{\frac{bb}{aa} CP} = \frac{\pm aa \mp xx}{x}$.

409. DÉFINITION. La perpendiculaire MN (FIG. 135 et 137) sur la tangente au point de contact, s'appelle *normale*; et la partie PN de l'axe comprise entre l'ordonnée MP et la normale MN, est la *sous-normale*.

410. THÉORÈME VI. *L'expression de la sous-normale* PN *est* $\frac{\pm aax \mp ccx}{aa}$: *et celle de la normale* MN (appelant les rayons vecteurs FM, fM, l'un R, l'autre r) *est* $\frac{b}{a}\sqrt{Rr}$.

DÉMONSTRATION. 1.° Le triangle rectangle NMT, donne $PT : PM : PN = \left(\frac{PM^2}{PT}\right) = \frac{bbx}{aa}$: ou à cause de $bb = \pm aa \mp cc$ (374 et 395), $PN = \frac{\pm aax \mp ccx}{aa}$.

2.° La normale $MN = \sqrt{(PM)^2 + (PN)^2} = \sqrt{\left(\frac{bb}{aa}(\pm aa \mp xx) + \frac{b^4x^2}{a^4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2}(\pm a^2 \mp x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2})\right)} = \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{\pm a^4 \mp a^2x^2 + b^2x^2}{a^2}\right)}$. Si l'on met pour b^2, sa valeur $\pm a^2 \mp c^2$, on aura réduction faite, $MN = \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{\pm a^4 \mp c^2x^2}{a^2}\right)} = \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{\pm a^2 \mp cx}{a} \times \frac{a^2 + cx}{a}\right)} = \frac{b}{a}\sqrt{FM \times fM}$ (406) $= \frac{b}{a}\sqrt{Rr}$.

---

des quantités infiniment petites ne peuvent ni augmenter par l'addition, ni diminuer par la soustraction les quantités finies qui entrent dans le même calcul (voyez plus bas, *principes de Calc. différentiel, chap.* 1).

411. Corollaire. On aura donc 1.° $CT = CP \pm PT = x + \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{a^2}{x}$.

2.° $FT = \pm CT \mp CF = \pm\frac{aa}{x} \mp c = \frac{\pm a^2 \mp cx}{x} = \frac{a}{x}\left(\frac{\pm aa \mp cx}{a}\right) = \frac{a}{x}FM$ (406) : par la même raison, $fT = CT + Cf = \frac{a}{x}fM$.

3.° $TN = PT + PN = \frac{\pm a^2 \mp x^2}{x} \pm \frac{a^2x \mp c^2x}{a^2} = \frac{\pm a^4 \mp c^2x^2}{a^2x} = \frac{FM \times fM}{x}$ (406).

412. Théorème VII. *Si l'on tire d'un foyer* F *ou* f, *une perpendiculaire* FQ *ou* fq *sur la tangente* TM, *on aura* $FQ = b\sqrt{\left(\frac{FM}{fM}\right)}$ *et* $fq = b\sqrt{\left(\frac{fM}{FM}\right)}$.

Démonstration. 1.° Soit la normale MN, les triangles semblables TNM, TFQ donneront, TN : NM :: FT : FQ. Substituant les expressions déja trouvées, on aura, $\frac{FM \times fM}{x} : \frac{b}{a}\sqrt{FM \times fM} :: \frac{a}{x}FM : FQ = \ldots\ldots$ $\frac{b}{fM}\sqrt{FM \times fM} = b\sqrt{\left(\frac{FM}{fM}\right)}$.

2.° Les triangles semblables TNM, Tfq, donnent TN : NM :: fT : fq, ou bien $\frac{FM \times fM}{x} : \frac{b}{a}\sqrt{FM \times fM} :: \frac{a}{x}fM : fq = b\sqrt{\left(\frac{fM}{FM}\right)}$.

413. Si l'on mène une autre tangente à un autre point M′, les rayons vecteurs FM′, fM', et la perpendiculaire FQ′ sur la nouvelle tangente, on aura $FQ' = b\sqrt{\left(\frac{FM'}{fM'}\right)}$. Donc $FQ : FQ' :: \sqrt{\left(\frac{FM}{fM}\right)} : \sqrt{\left(\frac{FM'}{fM'}\right)}$. Or, 1.° dans l'ellipse, si l'on suppose que FM > FM′, on aura $fM < fM'$, puisque $FM + fM = FM' + fM' = 2a$

(369). Donc alors $\frac{FM}{fM} : \frac{FM'}{fM'} > FM : FM'$; et par conséquent on aura $FQ : FQ' > \surd FM : \surd FM'$. 2.° Dans l'hyperbole les deux rayons vecteurs FM, fM, croissent en même temps. Donc $\frac{FM}{fM} : \frac{FM'}{fM'} < FM : FM'$. Donc aussi $FQ : FQ' < \surd FM : \surd FM'$. D'où il suit que *les perpendiculaires menées d'un foyer sur les tangentes à différents points, croissent dans l'ellipse en plus grande raison, et dans l'hyperbole en plus petite raison, que les racines quarrées des rayons vecteurs tirés du même foyer aux points de contact.*

414. Puisque $FQ = b\surd\left(\frac{FM}{fM}\right)$, $fq = b\surd\left(\frac{fM}{FM}\right)$, on aura $\overline{FQ^2} : \overline{fq^2} :: b^2\frac{FM}{fM} : b^2\frac{fM}{FM} :: \overline{FM^2} : \overline{fM^2}$. Donc aussi $\overline{FM^2} - \overline{FQ^2} : \overline{fM^2} - \overline{fq^2} :: \overline{FQ^2} : \overline{fq^2} :: FM^2 : fM^2$. Or, $\overline{FM^2} - \overline{FQ^2} = \overline{MQ^2}$, $\overline{fM^2} - \overline{fq^2} = \overline{Mq^2}$ (174). Substituant et extrayant les racines, on a $MQ : Mq :: FQ : fq :: FM : fM$. Ainsi (118) les triangles FMQ, fMq, sont équiangles, et l'angle FMQ = l'angle fMq. Ce qui prouve *que dans l'ellipse et l'hyperbole la tangente fait des angles égaux avec les deux rayons vecteurs, qui aboutissent au point de contact*; et qu'ainsi pour tirer cette ligne sur le point M, *il suffit, dans l'hyperbole, de diviser en deux également* (60) *l'angle formé par les deux rayons vecteurs* FM, fM, *et dans l'ellipse, de diviser ainsi le supplément de cet angle.*

415. Si l'on mène les droites FR, Gg, l'une par le foyer, l'autre par le centre, parallèlement à la tangente TM, le triangle MFR aura deux angles égaux (414) l'un en F, l'autre en R. Donc $MR = MF = \frac{\pm a^2 \mp cx}{a}$, et $fR = fM \mp MR = \frac{a^2 + cx}{a} - \frac{a^2 + cx}{a} = \frac{2cx}{a}$. Or, (103) $fC : CF :: fX : XR = fX$. Donc $XR = \frac{1}{2}fR = \frac{cx}{a}$; par consé-

quent XR ± MR ou MX $= \frac{cx}{a} + \frac{a^2 - cx}{a} = a$, c'est-à-dire, que *la partie* MX *du rayon vecteur* fM, *comprise entre le point de contact* M, *et une droite* Gg, *qui passe par le centre parallèlement à la tangente* TM, *vaut la moitié du grand axe.*

416. Théorème VIII. *Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, toute ligne droite, comme* Mm', *qui passe par le point* C, *lequel est à distances égales des deux foyers* F, f, *et qui est terminée de part et d'autre à la courbe, est partagée dans ce point en deux parties égales, ou bien on a* CM = Cm'.

Démonstration. Si du foyer *f*, et d'un rayon égal à FM, on décrit un arc de cercle, qui coupe la courbe en *m'*, et d'un côté de l'axe opposé à M, on aura le rayon vecteur *fm'* = FM; et par conséquent (369 et 389) *f* M = F*m*. Donc le quadrilatère FM*fm'* sera un parallélogramme (91): et si le point C est le milieu de la diagonale F*f*, il le sera de la diagonale M*m'* (133); ou bien, aura, CM = C*m'*: il en sera de même pour toute autre ligne qui, passant par le point C de l'axe, se terminera de part et d'autre à la courbe.

417. Corollaire. De ce que FM*fm'* est un parallélogramme, on conclura que l'angle FM*f* = F*m'f*, et qu'ainsi (414) l'angle TMF = *tm'f*, ou bien *que les deux tangentes opposées* MT, m't *sont parallèles.*

418. Définitions. Le *centre* d'une courbe, ainsi que d'un polygone quelconque, est un point situé de telle sorte, que toutes les droites qui passent par ce point et se terminent à la courbe ou au contour du polygone, y sont partagées également. On appelle *diamètres* les droites qui passent par le centre et se terminent au contour de la figure. Ainsi l'ellipse, l'hyperbole, le cercle, et les polygones soit réguliers, soit symétriques (134) ont un centre et des diamètres. Dans l'ellipse et l'hyperbole, deux diamètres M*m'*, D*d* (fig. 138 et 139), sont dits *con-*

jugués l'un à l'autre, lorsque le premier est parallèle à la tangente tirée sur l'extrémité du second.

419. THÉORÈME IX. *Si des extrémités* M, D, *de deux diamètres conjugués on tire les ordonnées* MP, DI, *à l'axe* A*a*, *on aura*, 1.° $MP \times DI = \frac{b^2}{a^2} CP \times CI$, *ou* $CI : DI :: MP : \frac{b^2}{a^2} \times CP$. 2.° $\overline{CI}^2 = \pm a^2 \mp \overline{CP}^2$.

DÉMONSTRATION. 1.° Si l'on mène la normale MN, les triangles DIC, MPN étant semblables (117), donneront $CI : DI :: MP : PN$. Or (410), $PN = \frac{b^2}{a^2} x = \frac{b^2}{a^2} CP$. Donc $CI : DI :: MP : \frac{b^2}{a^2} CP$, ou $MP \times DI = \frac{b^2}{a^2} CP \times CI$.

2.° On aura donc $\overline{CI}^2 : \overline{DI}^2 :: \overline{MP}^2 : \frac{b^4}{a^4} \overline{CP}^2$. Or, (399) $\overline{MP}^2 = \frac{b^2}{a^2}(\pm a^2 \mp \overline{CP}^2)$; $\overline{DI}^2 = \frac{b^2}{a^2}(\pm a^2 \mp \overline{CI}^2)$. Donc $\overline{CI}^2 : \frac{b^2}{a^2}(a^2 \mp \overline{CI}^2) :: \frac{b^2}{a^2}(\pm a^2 \mp \overline{CP}^2) : \frac{b^4}{a^4} \overline{CP}^2$. Ou en simplifiant, $\overline{CI}^2 : a^2 \mp \overline{CI}^2 :: \pm a^2 \mp \overline{CP}^2 : \overline{CP}^2$. Ajoutant les antécédents aux conséquents dans le cas du signe supérieur, ou les soustrayant pour le signe inférieur, on a, réduction faite, $\overline{CI}^2 : a^2 :: \pm a^2 \mp \overline{CP}^2 : a^2$, ce qui donne $\overline{CI}^2 = \pm a^2 \mp \overline{CP}^2$.

420. THÉORÈME X. *Si l'on mène au diamètre* Mm', *une ordonnée* mp *parallèle à son conjugué* D*d*, *on aura, en faisant* $mp = y$, $Cp = x$, $CM = m$, $CD = n$, $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(\pm m^2 \mp x^2)$.

DÉMONSTRATION. Tirons les perpendiculaires *m*O, *p*Q, et la parallèle *p*L à l'axe A*a*, nous aurons (399) $\overline{mO}^2 = \pm b^2 \mp \frac{b^2}{a^2} \overline{CO}^2$. Or, 1.° $mO = mL + pQ$, et $CO = CQ \mp pL$.

$\mp pL$. 2.° Les triangles mLp, DIC, donnent DC (n) : mp (y) :: DI : $mL = \frac{y}{n} \times DI$ :: CI : $Lp = \frac{y}{n}$ CI; et les triangles CMP, CpQ donnent CM (m) : Cp (x) :: MP : $pQ = \frac{x}{m}$ MP :: CP : CQ $= \frac{x}{m}$ CP. Donc $mO = \frac{y}{n}$ DI $+ \frac{x}{m}$ MP, CO $= \frac{x}{m}$ CP $\mp \frac{y}{n} \times$ CI. Substituant dans la première équation, elle devient $\frac{y^2}{n^2}\overline{DI^2} + \frac{2xy}{mn}$ MP $\times$ DI $+ \frac{x^2}{m^2}\overline{MP^2}$ $= \pm b^2 \mp \frac{b^2x^2}{a^2m^2} \times \overline{CP^2} + \frac{2xy}{mn} \times \frac{b^2}{a^2}$ CP $\times$ CI $\mp \frac{b^2y^2}{a^2n^2}\overline{CI^2}$. Or (419), MP $\times$ DI $= \frac{b^2}{a^2}$ CP $\times$ CI, en outre (375 et 404) $\overline{DI^2} = b^2 \mp \frac{b^2}{a^2}\overline{CI^2}$, $\overline{MP^2} = \pm b^2 \mp \frac{b^2}{a^2}\overline{CP^2}$. Substituant et réduisant, on aura, $\frac{b^2y^2}{n^2} \pm \frac{b^2x^2}{m^2} = \pm b^2$; Donc $y^2 = \pm n^2 \mp \frac{n^2x^2}{m^2}$, ou $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(\pm m^2 \mp x^2)$.

421. Corollaire. Puisque dans l'ellipse $mm - xx = (m + x)(m - x) = m'p \times Mp$; et que dans l'hyperbole $xx - mm = (x + m)(x - m) = m'p \times Mp$, on a dans l'une et l'autre courbe, $yy = \frac{nn}{mm}(m'p \times Mp)$: ou bien $yy : m'p \times Mp :: nn : mm$, propriété analogue à celle que nous avons trouvée ailleurs (380) pour les axes.

422. Remarque. Si l'origine des abscisses est au sommet M, ou si $Mp = x$, on aura $m'p = 2m \mp x$, ce qui change l'équation $yy = \frac{nn}{mm}(Mp \times m'p)$ en $yy = \frac{nn}{mm}(2mx \mp xx)$.

423. Théorème XI. *L'expression d'un demi-diamètre* CM, *rapporté aux axes, est* $CM = \sqrt{\left(\frac{\pm aabb + ccxx}{aa}\right)}$; *et celle*

de son conjugué est $CD = \sqrt{\left(\frac{\pm a^4 \mp ccxx}{aa}\right)}$, *ou* (406) $CD = \sqrt{FM \times fM}$.

DÉMONSTRATION. Soient les ordonnées MP, DI, perpendiculaires sur l'axe A*a*, nous aurons 1.° $CM = \sqrt{CP^2 + MP^2} = \sqrt{\left(xx \pm bb \mp \frac{bbxx}{aa}\right)}$; mettant dans $\frac{bbxx}{aa}$ la valeur $\pm aa \mp cc$ de bb, on a réduction faite, CM. . . . . $= \sqrt{\left(\frac{\pm aabb + ccxx}{aa}\right)}$. . . 2.° $CD = \sqrt{(CI)^2 + (DI)^2} = \sqrt{\left((CI)^2 \pm bb \mp \frac{bb}{aa} CI^2\right)}$. Or, $\overline{CI^2} = \pm aa \mp \overline{CP^2} = \pm aa \mp xx$. Substituant, et réduisant, $CD = \sqrt{\left(\pm aa \mp xx + \frac{bbxx}{aa}\right)}$. Mettant $\pm aa \mp cc$ au lieu de bb, il vient CD $= \sqrt{\left(\frac{\pm a^4 \mp ccxx}{aa}\right)} = \sqrt{FM \times fM}$.

424. COROLLAIRE. Il suit de là que $\overline{CM^2} \pm \overline{CD^2} = \pm bb + aa$, ou $\overline{CD^2} \pm \overline{CM^2} = \pm aa + bb$. Ce qui signifie *que dans ces courbes la somme ou la différence des quarrés des deux demi-diamètres conjugués, est égale à la somme ou à la différence des quarrés des deux demi-axes.*

425. THÉORÈME XII. *Le parallélogramme* CMtd, *construit sur les demi-diamètres conjugués* CM, Cd, *et sur leurs tangentes est égal au rectangle des demi-axes, ou bien* CM td = ab.

DÉMONSTRATION. Soit M*q* perpendiculaire sur C*d*, nous aurons (165) $CM\,td = Mq \times C\,d = Mq\sqrt{FM \times fM}$. Or, si l'on mène le rayon vecteur fM, et la ligne fS perpendiculaire sur la tangente TM, les triangles équiangles MX*q*, fMS donneront $fM : fS :: MX : Mq$, ou (412 et 415) fM: $b\sqrt{\left(\frac{fM}{FM}\right)} :: a : Mq = ab\sqrt{\left(\frac{1}{FM \times fM}\right)} = \frac{ab}{\sqrt{(FM \times fM)}}$. Donc $Mq \times \sqrt{FM \times fM}$, ou $CM\,td = ab = Mq \times C\,d$. Ainsi

en faisant $Mq = q$, $Cd = n$, on aura $ab = nq$, et par conséquent les parallélogrammes construits sur deux diamètres conjugués quelconques sont tous égaux, puisque chacun vaut le rectangle formé sur les axes.

426. THÉORÈME XIII. *Si sur les axes de l'hyperbole* Aa, Bb (FIG. 140) *on construit le rectangle* RVru, *les diagonales* Rr, Vu *seront les asymptotes de l'hyperbole.*

DÉMONSTRATION. Les triangles semblables CAR, CPN, donnent CA : AR :: CP : PN, ou en faisant $CP = x$, $CA = a$, $AR = CB = b$, $a : b :: x : PN = \frac{bx}{a}$. Par conséquent $\overline{PN}^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$. Or (396), $\overline{PM}^2 = -b^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}$. Donc $\overline{PN}^2 - \overline{PM}^2 = b^2$, c'est-à-dire, que dans la même courbe la différence des quarrés $\overline{PN}^2$ et $\overline{PM}^2$ est constante, ou bien que $\overline{PM}^2$ croît autant que PN^2. Donc PM croît plus que PN, et par conséquent la courbe s'approche toujours de R*r*. Cette ligne en est donc l'asymptote (365); et il en est de même de V*u*, par rapport à l'autre branche.

427. THÉORÈME XIV. *Si d'un point* M *de l'hyperbole, on mène à l'asymptote voisine la droite* MN *parallèle au second axe, et qu'on la prolonge jusqu'a l'autre asymptote, on aura* $MN \times Mn = b^2$.

DÉMONSTRATION. Nous avons vu (426) que $\overline{PN}^2 - \overline{PM}^2 = b^2$. Or, $\overline{PN}^2 - \overline{PM}^2 = (PN + PM)(PN - PM) = (Pn + PM)(PN - PM) = Mn \times MN$. Donc $MN \times Mn = b^2$; pour la même raison on aura $mn \times mN = b^2$; et si l'on mène E*e* parallèle à N*n*, on aura encore $TE \times Te = b^2 = MN \times Mn = mn \times mN$.

428. THÉORÈME XV. *Si d'un point quelconque* M *de l'hyperbole on mène à l'asymptote voisine la droite* M*p*, *paral-*

lèle à l'autre asymptote; et qu'on fasse $Mp = y$, $Cp = x$, $CR = Cu = 2r$, *on aura l'équation* $y = \frac{r^2}{x}$.

DÉMONSTRATION. Tirons par le point M la droite NM*n* parallèle au second axe, et MS parallèle à CN, les triangles MN*p*, *u*RC isocèles et semblables donneront MN : *u*R :: M*p* : CR; de même les triangles MS*n*, RC*u*, isocèles et semblables, donneront M*n* : *u*R :: MS ou C*p* : CR. Multipliant par ordre les termes de ces deux proportions, on aura $MN \times Mn : \overline{uR}^2 :: Mp \times Cp : \overline{CR}^2$. Or (427), $MN \times Mn = b^2 = \overline{CB}^2 = \overline{AR}^2 = (\frac{1}{2} uR)^2 = \left(\frac{uR^2}{4}\right)$. Donc aussi $Mp \times Cp = \left(\frac{(CR)^2}{4}\right)$: mettant les expressions analytiques, il vient $yx = r^2$, ou $y = \frac{r^2}{x}$.

429. COROLLAIRE I. La quantité $r^2 = \left(\frac{(CR)^2}{4}\right) = \frac{(CA)^2+(AR)^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{4}$ étant constante, il s'ensuit *que les ordonnées* Mp *à l'asymptote* CR, *parallèles à l'autre asymptote, sont entre elles en raison inverse des abscisses correspondantes.*

430. COROLLAIRE II. Si l'on tire sur une asymptote C*c* des ordonnées *mo*, *ms*, *mr*, *mq*, parallèles à l'autre asymptote, on aura donc :

$$mo : ms :: Cs : Co$$
$$mr : mq :: Cq : Cr$$

De ces deux proportions on conclura (*Alg.* 231)

$$mo - ms : Cs - Co :: ms : Co :: ms \times mo : Co \times mo.$$
$$mr - mq : Cq - Cr :: mq : Cr :: mq \times mr : Cr \times mr.$$

Or, si l'on suppose que *mo* et *ms* sont aussi éloignées que *mr* et *mq*, on aura $Cs - Co = Cq - Cr$, tandis que (427), $Co \times mo = Cr \times mr$. Donc $mo - ms : mr - mq :: ms$

$\times mo : mq \times mr$, ou bien *les différences de deux ordonnées sont entre elles, comme les produits de ces mêmes ordonnées.* Et si en outre on suppose que *mo* et *ms*, *mr* et *mq* sont infiniment près, on aura $ms \times mo = \overline{ms}^2 = \overline{mo}^2$; et $mq \times mr = \overline{mq}^2 = \overline{mr}^2$. C'est-à-dire, que *dans ce cas les différences des ordonnées sont entre elles, comme les quarrés de ces mêmes ordonnées.*

CHAPITRE IV.

De la Parabole.

431. DÉFINITIONS. Soient les droites indéfinies TN, SDS′ (FIG. 141) perpendiculaires l'une à l'autre. Fixons à volonté un point F sur l'une, et imaginons que l'on prenne sur le plan de ces lignes des points M, tels que les perpendiculaires MS sur DS, soient égales aux droites MF, tirées des mêmes points au point fixe F, la courbe qui passe par cette suite de points est *une parabole.* Le point F en est le *foyer*; les lignes telles que FM sont des *rayons vecteurs* : la droite SDS′, se nomme la *directrice* de la parabole ; TN en est l'*axe*, et son intersection en A avec la courbe forme le *sommet* : les perpendiculaires comme MP sur l'axe sont les *ordonnées*, et les AP correspondantes sont leurs *abscisses.*

432. COROLLAIRE. Il suit de cette définition, 1.° Que FA=AD, ou bien *que le sommet de la courbe est à même distance du foyer et de la directrice.* 2.° Que si l'on prend une équerre DSO, et un fil inextensible FMO=SO, dont une extrémité soit fixée en F, et l'autre en O, la parabole sera décrite d'un mouvement continu, par un style M, qui étant mobile le long du côté de l'équerre SO, tiendra le fil FMO toujours tendu, tandis que la branch eSD glissera sur la directrice SS′. Car alors on aura toujours MS=MF.

433. Pour avoir l'équation de la parabole, soit MP $= y$, AP $= x$, AD $=$ AF $= a$. Cela posé, le triangle rectangle MPF donne, $\overline{PM}^2 = MF^2 - PF^2$. Or, MF $=$ MS $=$ PD $=$ AP $+$ AD $= x + a$, PF $=$ AP $-$ AF $= x - a$. Donc, $y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2 = 4ax$.

434. DÉFINITION. La quantité constante $4a$, dans l'équation de la parabole, s'appelle le *paramètre de l'axe*. Si l'on fait $4a = p$, l'équation ci-dessus devient $y^2 = px$.

435. COROLLAIRE. Il suit de là 1.° *Que l'ordonnée qui passe par le foyer, vaut la moitié du paramètre, ou bien que* $m'F = \frac{1}{2}p$. Car dans ce cas $x =$ AF $= a = \frac{1}{4}p$. Donc $\overline{m'F}^2 = p \times \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}p^2$, ou $m'F = \frac{1}{2}p$.

436. 2.° Que p étant une quantité constante, les quarrés des ordonnées sont comme les abscisses correspondantes; ou bien que *les ordonnées sont entre elles, comme les racines quarrées des abscisses.*

437. 3.° Qu'à chaque abscisse répondent deux ordonnées égales, l'une positive, l'autre négative; puisqu'on a toujours $y = \pm\sqrt{px}$. Ainsi *la courbe a deux branches égales, l'une à droite, l'autre à gauche de l'axe* TN.

438. 4.° Que les abscisses et les ordonnées croissent en même temps; qu'ainsi les branches de la parabole ne peuvent jamais se rencontrer en s'écartant du sommet, c'est-à-dire, *que la parabole n'est point une courbe rentrante.*

439. 5.° Qu'en faisant l'abscisse x négative, l'équation $yy = -px$ rend y imaginaire. Ainsi, *la courbe ne s'étend pas au-delà du sommet* A.

440. PROBLÈME. *Mener une tangente à un point quelconque* M' *de la parabole.*

SOLUTION. De ce point M' tirez sur la directrice la perpendiculaire M'S'; partagez également par la droite M'T l'angle S'M'F formé au point M' par cette perpen-

diculaire et par le rayon vecteur FM′ (60), et cette ligne sera la tangente cherchée. Car le triangle S′M′F étant isocèle (431) et M′T étant une perpendiculaire abaissée du sommet sur la base FS′, chacun de ses points sera à égale distance de F et de S′; donc si le point *o* pris en dedans de la parabole, appartenait à cette perpendiculaire, on aurait F*o* = S′*o*. Donc si du rayon S′*o* et du centre S′ on décrivait l'arc *on*; et si du rayon F*o* et du centre F on décrivait l'arc *or*, ces deux arcs se coupant en *o*, le point *r* serait plus près de la directrice que le point *o*; en outre, si du point *n* on tirait sur la directrice la perpendiculaire *ns′*, et du point *r* la perpendiculaire *rs*, on aurait F*o* = S′*o* = S′*n* > *s′n* (44), et F*o* = F*r* = *sr*. Donc *sr* > *s′n*, ou bien en tirant *ri* parallèle à la directrice, *s′i* > *s′n*, ou la partie est plus grande que le tout; ce qui est absurde.

441. Corollaire I. *Dans cette courbe la tangente* MT *forme donc des angles égaux avec le rayon vecteur* MF, *qui aboutit au point de contact et avec une droite* MO *tirée de ce point parallèlement à l'axe.* Car la ligne OMS étant parallèle à l'axe ou perpendiculaire à la directrice, l'angle TMF = TMS = EMO, qui lui est opposé.

442. II. *La tangente au sommet* A *de la parabole est donc perpendiculaire a l'axe* AN. Car le rayon vecteur FA et la ligne AD parallèle à l'axe, étant dans le même alignement, sont censés faire en A un angle de 180°. Donc l'angle FAQ, qui en est la moitié, est de 90°.

443 III. *Le triangle* FMT *est donc isocèle;* car l'angle FMT = EMO = MTF (38).

444. Théorème I. *La sous-tangente* PT *dans la parabole est double de l'abscisse correspondante* PA, *ou bien son expression est* PT = 2x, *et celle de la tangente* MT *est* $\sqrt{px + 4xx}$.

Démonstration. 1.° Le triangle isocèle FMT donne FT = FM = MS = PA + AD. Donc FT — AD, ou FT — AF,

ou encore AT = PA; et par conséquent PA + AT, ou PT = 2 PA = 2 x.

2.° Le triangle rectangle MPT, donne $\overline{MT}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PT}^2 = yy + 4xx = px + 4xx$. Donc $MT = \sqrt{px + 4xx}$.

445. THÉORÈME II. *Dans cette courbe la sous-normale* PN *vaut la moitié du paramètre, et la normale* MN *vaut la racine quarrée du paramètre multiplié par le rayon vecteur qui aboutit au point* M.

DÉMONSTRATION. 1.° Ayant élevé sur le point de contact la perpendiculaire MN sur la tangente MT, on aura (123) $\therefore PT : PM : PN = \frac{(PM^2)}{PT} = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$.

2.° Le triangle rectangle MNP donne, $MN = \sqrt{(\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2)} = \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2} = \sqrt{p\,(x + \frac{1}{2}p)}$. Or, $x + \frac{1}{2}p = PD = MS = MF$. Donc $MN = \sqrt{p \times MF}$.

446. COROLLAIRE. Si l'on abaisse du foyer F, la perpendiculaire FQ sur la tangente, les triangles FQT, NPM, donneront, MN : PN :: FT : FQ. Or, $MN = \sqrt{p \times FM}$, $PN = \frac{1}{2}p$, FT = FM. Substituant on trouvera, $FQ = \frac{1}{2}\sqrt{p \times FM}$. Puisque dans cette expression tout est constant, excepté FM, il s'ensuit que *dans la parabole les perpendiculaires menées du foyer sur les tangentes aux différents points de la courbe, sont comme les racines quarrées des rayons vecteurs correspondants.*

447. DÉFINITION. Dans la parabole on appelle *diamètre* toute droite ML (FIG. 142) tirée d'un point quelconque M de la courbe, parallèlement à son axe AO. Le point M en est l'origine. Ses *ordonnées* sont les droites mp parallèles à la ligne TM, qui touche la courbe à l'origine de ce diamètre. *L'abscisse* est la partie Mp du diamètre, comprise entre son origine M et l'ordonnée correspondante mp.

448. Pour avoir l'équation au diamètre, soit $mp = y$,

$Mp = x$: menons à l'axe les ordonnées MP, mO, ainsi que la normale MN; faisons de plus AP $= c$, PM $= b$. Cela posé, nous aurons $\overline{m\text{O}}^2 = p \times \text{AO}$. Or, 1.° $m\text{O} = m\text{L} + \text{MP} = m\text{L} + b$; AO $=$ AP $+$ Mp $+ p$L $= c + x + p$L. 2°. Les triangles PMN, Lpm, donnent (117) MN, ou $\sqrt{p \times \text{MF}} : mp$, ou $y ::$ PN, ou $\frac{1}{2}p : m\text{L} = \frac{\frac{1}{2}py}{\sqrt{(p \times \text{MF})}} ::$ PM, ou $b : p\text{L} = \frac{by}{\sqrt{(p \times \text{MF})}}$. Donc $m\text{O} = \frac{\frac{1}{2}py}{\sqrt{(p \times \text{MF})}} + b$, et $\text{AO} = c + x + \frac{by}{\sqrt{(p \times \text{MF})}}$. Substituant dans $\overline{m\text{O}}^2 = p \times \text{AO}$, il vient $\frac{\frac{1}{4}p^2y^2}{p \times \text{MF}} + \frac{bpy}{\sqrt{(p \times \text{MF})}} + bb = pc + px + \frac{bpy}{\sqrt{(p \times \text{MF})}}$. Or, $bb = \overline{\text{PM}}^2 = p \times \text{AP} = pc$. Donc, en réduisant, $\frac{\frac{1}{4}pyy}{\text{MF}} = px$, ce qui donne $yy = 4\text{MF} \times x$ (la quantité constante 4MF s'appelle le *paramètre du diamètre* ML, et si on le fait $= q$, on aura $yy = qx$, ainsi que pour l'axe (434).

CHAPITRE V.

De la Cycloïde.

449. DÉFINITION. Si un cercle AER (FIG. 143) roule sur une droite AB, posée dans le plan de cette figure, de sorte que AB soit toujours tangente, le point A de la circonférence qui d'abord est en contact avec cette droite, décrira dans ce mouvement une ligne courbe AMSB, que l'on nomme *cycloïde*. La ligne AB en est la *base;* la perpendiculaire DS, sur le milieu de la base, est son *axe;* le point S le *sommet;* et le cercle AER est appelé le cercle *générateur*.

Si ce cercle ne fait qu'appliquer sa circonférence sur

AB, alors la base AB est égale à la circonférence du cercle générateur, et la courbe AMSB est une cycloïde *ordinaire*. S'il a un mouvement de rotation qui lui soit propre autour de son centre dans le sens AER, outre celui qu'il a dans le même sens en roulant sur AB, le point générateur A reviendra en contact avec AB, plutôt qu'il n'y serait revenu sans ce mouvement propre; et alors la base sera plus petite que dans la cycloïde ordinaire, ou bien elle sera plus petite que la circonférence du cercle générateur; et dans ce cas la courbe tracée par le point A est une cycloïde *accourcie*. Enfin si le centre du cercle générateur était transporté d'un mouvement propre dans le sens ARE, par une raison contraire, la base serait plus grande que la circonférence de ce cercle, et alors la cycloïde serait *alongée*.

450. Il suit de là, 1.° que la cycloïde sera ordinaire, lorsque le point A ne tournera autour du centre du cercle générateur, qu'en vertu du roulement de ce cercle sur AB; qu'elle sera accourcie, lorsque ce point aura un mouvement propre dans le même sens; et qu'elle sera alongée, lorsqu'il aura un mouvement propre en sens contraire.

451. 2.° Que dans la cycloïde ordinaire la base est égale à la circonférence du cercle générateur, qu'elle est plus petite que cette circonférence dans la cycloïde accourcie, et qu'elle est plus grande dans la cycloïde alongée.

452. REMARQUE. Il faut que le mouvement du point générateur dans le sens ARE, soit plus petit que celui qu'il a dans le sens AER par le roulement du cercle sur la base AB. Sans cela, il pourrait se faire que ce point générateur décrivît une ligne droite, ou bien d'autres espèces de cycloïdes, dont nous ne parlerons pas ici.

453. THÉORÈME I. *Si d'un point quelconque* M *de la cycloïde ordinaire, on tire la perpendiculaire* MP *sur l'axe* DS,

sa partie MO *sera égale à l'arc correspondant* SO *du cercle générateur, décrit sur l'axe, compris entre cette droite* MP *et le sommet* S.

Démonstration. Supposons que, lorsque le point générateur est en M, le cercle générateur touche la base au point V; nous aurons l'arc MTV = l'arc O *o* D (57). Par conséquent (38) la corde MV sera parallèle à la corde OD, ce qui donnera (88) MO = DV. Or, par la nature de la cycloïde ordinaire, la demi-base AD = la demi-circonférence DOS, et la partie AV = l'arc appliqué MTV = O *o* D. Donc DV ou MO = DOS — D *o* O = SO.

454. Corollaire. D'après cette propriété, il est aisé d'avoir l'équation à la cycloïde. Car appelant l'ordonnée MP, y: et l'arc SO, u: on a toujours OM = u et OP = $\sin u$. Donc MP ou $y = u + \sin u$.

455. Théorème II. *La tangente en un point quelconque* M (fig. 144) *de la cycloïde ordinaire, est parallèle à la corde* SO *de l'arc correspondant* SIO *du cercle décrit sur l'axe.*

Démonstration. Soit M m un arc élémentaire dont le prolongement en ligne droite forme la tangente MT : menons M P, $m p$, perpendiculaires sur l'axe : M r parallèle à O o : prolongeons SO jusqu'en x, et o O en une ligne droite o O N. Le triangle O $o x$ aura son angle en O égal à l'angle NOS (32), son angle en x égal à l'angle SOF (50). Or, NOS = SOF, puisqu'ils sont mesurés (65 et 67) par les moitiés des arcs égaux (56) SIO, SKF. Donc (82) O o = $o x$ = M r = $m r$. Donc les triangles O $o x$, M $r m$, sont semblables, et l'angle en x = l'angle en m. Donc m M est parallèle à x O, ou bien TM est parallèle à SO.

456. Théorème III. *Un arc cycloïdal quelconque* SM *est double de la corde* S O *de l'arc correspondant* SIO *du cercle générateur décrit sur l'axe, ou* SM = 2 SO.

Démonstration. Soit l'arc $n o$ décrit du point S comme

centre avec le rayon S*o*, il est clair que *n* O et M *m* ou O *x*, sont les incréments correspondants de la corde SO et de l'arc cycloïdal SM. Or, O *x* = 2 *n* O (125). Donc aussi SM = 2 SO.

457. COROLLAIRE. La demi-cycloïde AMS est donc double de son axe SD, puisque cet axe est la corde de l'arc correspondant dans le cercle générateur; par conséquent *la cycloïde entière est quadruple de son axe.*

458. THÉORÈME IV. *La tangente* MT *à un point quelconque* M *de la cycloïde, fait avec l'ordonnée* PM, *qui aboutit à ce point, un angle* PMT, *dont le cosinus varie en raison de la racine quarrée de la partie de l'axe* PD, *renfermée entre la base* DA *et l'ordonnée* PM.

DÉMONSTRATION. La corde SO étant parallèle à la tangente MT (455), l'angle PMT = POS, dont le complément est PSO. Or, dans le triangle rectangle SOD, si DS est pris pour le sinus total, DO sera le sinus de ce complément DSO; d'ailleurs DO varie en raison de la racine quarrée de PD (182). Donc le sinus de l'angle DSO, ou bien le cosinus de l'angle PMN, varie dans ce même rapport.

PRINCIPES
DE
CALCUL
DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

CHAPITRE PREMIER.

Introduction à ce calcul.

459. Si l'on inscrit ou si l'on circonscrit des polygones à une figure courbe, on pourra tellement augmenter le nombre des côtés de ces polygones, qu'ils différeront de l'aire curviligne d'une quantité, qu'on rendra toujours aussi petite qu'on voudra, et par conséquent plus petite qu'une quantité donnée quelconque. Ce que nous avons dit des polygones relativement aux figures courbes et planes, on peut le dire des polyèdres, relativement aux figures solides et courbes, et même, en général, de toute sorte de quantités variables, relativement à celles dont elles s'approchent tellement dans leurs variations, qu'elles en peuvent différer d'une quantité moindre qu'une quantité donnée quelconque.

460. Définition I. *On entend par* limite *d'une quantité variable, la valeur ou l'état auquel elle tend toujours dans ses variations, sans y parvenir jamais; et dont elle peut cependant approcher, de manière qu'elle en diffère d'une quantité moindre qu'une quantité donnée quelconque.* Ainsi le

cercle (143), ou même, en général, une figure courbe et plane quelconque est la limite de ses polygones, soit inscrits, soit circonscrits; la sphère est la limite des sphéroïdes, et le cône celle des pyramides, qui peuvent lui être inscrites et circonscrites.

461. THÉORÈME I. *Si l'on a deux suites de quantités croissantes*, a, c, e, g... *etc*... b, d, f, h... *etc. qui aboutissent l'une à la quantité* u, *l'autre à la quantité* x; *et que les termes correspondants dans les deux suites, savoir* a *et* b, c *et* d, e *et* f, *etc. soient dans un rapport constant, je dis que leurs limites* u *et* x, *seront dans le même rapport, ou bien qu'on aura*, a : b = u : x.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer ce théorème, il suffit de faire voir qu'on ne peut supposer, sans qu'il s'ensuive une absurdité, que le rapport de u à x soit, ou plus grand ou plus petit que celui de a à b. Supposons, en effet, qu'on eût $u : x > a : b$; en prenant dans la première suite une quantité m plus petite que la limite u, on pourrait donc avoir $m : x = a : b$. Or, quelque petite que soit la différence entre m et u, on peut trouver une infinité de quantités plus grandes que m et plus petites que u : si nous supposons qu'une de celles-là soit o, et que sa correspondante dans l'autre suite soit p, on aura :

$$\text{Hyp. . . .} \begin{cases} m : x = a : b \\ o : p = a : b \end{cases}$$

$$\text{Donc . . .} \quad o : p = m : x.$$

Or (hyp.) $o > m$. Donc $p > x$. Ce qui est absurde, puisque chaque série étant croissante, p est contenu dans x.

Si l'on supposait que $u : x < a : b$, on aurait, *invertendo*, $x : u > b : a$, ce que l'on démontrerait absurde par un raisonnement semblable au précédent. Il faut donc que l'on ait nécessairement $u : x = a : b$.

462. Cette propriété des limites et celle que nous démontrerons dans le théorème suivant, ont fourni aux an-

ciens une méthode des plus ingénieuses, pour passer des figures terminées par des lignes droites ou par des plans, à celles qui sont terminées par des lignes ou par des surfaces courbes. Pour démontrer, par exemple, que deux cercles différents A et B, sont entre eux comme les quarrés de leurs diamètres, Euclide raisonne à peu près de cette manière, dans la deuxième proposition du douzième livre. Si l'on inscrit des polygones semblables dans les cercles différents A et B, ces polygones sont entre eux comme les quarrés construits sur les diamètres de ces cercles (et cela est prouvé dans la première proposition du même livre). Donc, quelque grand que soit le nombre des côtés de ces polygones, la même raison subsistera toujours entre ces figures; et ce sera par conséquent la raison entre les limites de ces polygones croissants, lesquelles limites n'étant autre chose que les cercles A et B, il s'ensuit que ceux-ci sont entre eux comme les quarrés de leurs diamètres.

463. Nous verrons plus bas que les modernes ont suivi la même méthode toutes les fois qu'ils ont raisonné d'après l'idée de l'infini; mais auparavant faisons quelque autre application.

464. Soit la demi-ellipse AIB (FIG. 145), et le demi-cercle AHB, décrit sur son grand axe AB; qu'on tire les ordonnées DP, FQ, HC, perpendiculaires à l'axe, de façon que AP = PQ = QC; qu'on tire aussi les cordes AE, EG, GI, et AD, DF, FH. Les triangles APE, APD, ayant même base AP, seront entre eux comme leurs hauteurs PE, PD; ou bien (381) comme le petit axe ($2b$) est au grand axe ($2a$). Pareillement les trapèzes correspondants comme PEGQ, PDFQ, ayant leurs côtés parallèles à égale distance, sont comme les sommes de ces côtés, ou :: PE + QG : PD + QF. Or, puisque (381) PE : PD :: QG : QF, on a PE + QG : PD + QF :: PE : PD :: $2b$: $2a$. Donc (*alg.* 235) la somme des triangles et des trapèzes contenus dans l'ellipse, ou bien le polygone inscrit dans cette courbe, sera à la somme des

triangles et des trapèzes contenus dans le cercle, ou bien au polygone du même nombre de côtés, inscrit dans le cercle, :: 2 b : 2 a; et la même raison subsistera toujours entre les polygones ainsi décrits, quoique, en augmentant le nombre de leurs côtés, ils croissent continuellement. Donc (461) leurs limites, qui sont évidemment l'ellipse et le cercle circonscrit, seront dans la même raison, c'est-à-dire, comme le petit axe est au grand axe.

Nous avons vu (168) que la surface de tout polygone régulier vaut la moitié du produit de son périmètre multiplié par son apothème. Elle vaut donc celle d'un triangle qui aurait l'apothème pour hauteur, et le périmètre pour base. Or, si l'on conçoit d'abord un polygone régulier inscrit dans le cercle, et que le nombre de ses côtés aille croissant sans cesse, on aura une suite de polygones qui croîtront toujours en surface, et qui auront le cercle pour limite; et si l'on se représente une suite de triangles tels que le premier ait pour hauteur l'apothème du premier polygone, et son périmètre pour base; que le second ait pour hauteur l'apothème du second polygone, et son périmètre pour base, et ainsi des autres, il est évident que chaque triangle sera égal à chaque polygone correspondant, le premier au premier, le second au second, etc.; et que la limite de ces triangles croissants sera celui qui aura le rayon du cercle pour hauteur et sa circonférence pour base. Donc le même rapport d'égalité qu'il y avait entre chaque triangle, et le polygone correspondant, subsistera entre les limites; ou bien *le cercle sera égal à un triangle qui aurait le rayon pour hauteur et la circonférence pour base.*

465. THÉORÈME II. *Ce que nous avons dit dans le théorème précédent, des quantités qui sont limites des suites croissantes, doit s'entendre aussi de celles qui sont limites des suites décroissantes.*

DÉMONSTRATION. Car si cela n'était pas ainsi, on pourrait donc dire, en employant les dénominations du théorème

rème précédent que $u : x \lessgtr a : b$. Or, il est d'abord impossible qu'on ait $u : x < a : b$. Car alors prenant parmi les quantités décroissantes qui aboutissent à u, une quantité $m > u$, on pourrait avoir $m : x = a : b$. Or, entre m et u, on peut supposer dans la première suite une infinité de quantités chacune plus grande que u et plus petite que m. Donc si une de ces quantités est o, et que sa correspondante dans l'autre suite soit p, on aura :

$$\text{Hyp.} \ldots \left\{ \begin{array}{l} o : p = a : b \\ m : x = a : b \end{array} \right.$$

$$\text{Donc} \ldots \quad o : p = m : x.$$

Or (hyp.) $o < m$; donc $p < x$, ce qui est absurde, puisque p est une des quantités décroissantes qui aboutissent à x. En raisonnant comme dans le théorème précédent, on démontrera qu'il est absurde de supposer $u : x > a : b$; donc on a, $u : x = a : b$.

466. Corollaire I. *Deux suites de quantités* a, c, e, g . . . *etc.* . . . b, d, f, h . . . *etc. dont les correspondantes sont égales, savoir* a *et* b, c *et* d, e *et* f, *etc. ont pour limite la même quantité, ou bien des quantités égales.* Car quelles que soient ces quantités, soit croissantes soit décroissantes, la même raison d'égalité qui se trouve entre deux termes correspondants quelconques dans les deux séries, doit se trouver entre les limites de ces séries.

467. Corollaire II. L'on conclura de là, *que si l'on a deux suites de raisons, dont les correspondantes soient toujours égales, elles auront pour limite la même raison, ou bien des raisons égales.* Car considérant ces raisons comme de vraies quantités, ainsi qu'elles le sont en effet, ces deux suites doivent aboutir à la même raison ou à des raisons égales.

468. Théorème III. *Si l'on a deux suites de quantités variables, soit croissantes soit décroissantes, dont l'une* a, c, e, g, *etc. aboutisse à la quantité* u, *et l'autre* b, d, f,

sous-sécantes, est la raison de l'ordonnée MQ, *tirée sur le point* M, *à sa sous-tangente* QT; *que la dernière raison entre les ordonnées et les sécantes est celle de la même ordonnée* MQ *à la tangente* MT, *toujours menée de ce point* M.

471. THÉORÈME IV. *Quoiqu'on ait deux suites de quantités décroissantes qui aboutissent à zéro, on peut néanmoins concevoir que leurs rapports ne s'évanouissent pas, ou bien que leur dernière raison est une raison finie et déterminée.*

DÉMONSTRATION. Soit la courbe RMA, dans laquelle on prend deux ordonnées MQ, PR : du point M soit tirée MN parallèle à l'axe des abscisses AB, ce qui donnera RN pour la différence des deux ordonnées, et MN pour la différence de leurs abscisses. Concevons que l'ordonnée MQ étant immobile, RP s'en rapproche toujours, de façon que les différences des deux coordonnées (lesquelles différences sont RN et MN, R′N′ et MN′, R″N″ et MN″... etc.) diminuent continuellement, pour s'évanouir lorsque le point R arrivera en M. Cela posé, je dis que la raison entre ces mêmes différences ne tend pas à s'évanouir, ou bien que la limite de ces raisons est une raison finie et déterminée. Car à chaque point comme R, R′, R″... de l'arc RM, on aura trois triangles semblables, savoir pour le point R, RNM, RPS, MQS : pour le point R′, R′N′M, R′P′S′, MQS′ : pour le point R″, R″N″M, R″P″S″, MQS″, etc. Donc on aura ces trois suites de raisons dont les correspondantes dans chaque suite sont égales :

Suite I.	Suite II.	Suite III.
RN : MN	= RP : PS	= MQ : QS
R′N′ : MN′	= R′P′ : P′S′	= MQ : QS′
R″N″ : MN″	= R″P″ : P″S″	= MQ : QS″
etc. : etc.	= etc. : etc.	= etc. : etc.

Or, ici les raisons composant la troisième suite, vont en augmentant, puisque leurs antécédents sont constants, et que les conséquents diminuent sans cesse, en devenant

QS′, QS″... etc. Donc les raisons formant la première suite, croissent aussi, quoique leurs termes RN et MN, R′N′ et MN′... etc. tendent à s'évanouir et s'évanouissent en effet lorsque le point R tombe sur M. Leur limite n'est donc pas zéro, puisque, loin de s'approcher de cette prétendue limite, elles s'en écartent toujours. D'ailleurs, les raisons qui composent la seconde suite, ont pour limite une raison déterminée, savoir, celle de l'ordonnée MQ à sa sous-tangente QT (470). Donc les autres suites ont aussi la même limite ou une limite égale (467). Par conséquent quoiqu'on ait deux suites de quantités décroissantes, etc.

472. Remarque. Il faut observer ici que dans deux suites de quantités qui l'une et l'autre aboutissent en même temps à zéro, on ne peut point dire, d'après le théorème III, que *la limite des raisons est la raison des limites;* car ces limites n'étant point des quantités, on ne saurait concevoir un rapport entre elles. Il faut donc alors chercher cette limite des raisons ou cette *dernière raison* hors de la suite décroissante de ces quantités, et prendre l'expression de 0 : 0 qui est dans ce cas, celle du rapport des limites, plutôt pour un *symbole* qui annonce la dernière raison, que pour l'expression véritable de cette raison.

473. Definition III. Si l'on compare ensemble deux suites de raisons (que je désigne l'une par C, l'autre par D), et que les raisons correspondantes soient égales de part et d'autre, c'est-à-dire, que la première de C égale la première de D, la deuxième de C égale la deuxième de D, et ainsi du reste, les deux suites de raisons C et D seront appelées *suites parallèles.*

474. Théorème V. *Pour avoir la limite d'une suite de raisons, dont les termes aboutissent en même temps à* 0, *il faut prendre la raison des termes correspondants à* 0, *dans une suite parallèle de raisons dont les termes ne s'évanouissent pas.*

Par exemple, si j'ai la suite de raisons C, dont les termes

x et y tendent à s'évanouir en devenant, x', y'... x'', y''... x''', y'''... o, o ; je dis que la limite de ces raisons sera la raison des deux termes a et b, qui, dans la suite parallèle D, correspondent à y et x devenus o.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{C} & \\ x & : y \\ x' & : y' \\ x'' & : y'' \\ x''' & : y''' \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \text{o} & \text{o} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \text{D} \\ a : b + y \\ a : b + y' \\ a : b + y'' \\ a : b + y''' \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ a : b \end{array}\right.$$

Démonstration. 1.° Puisque y diminue en devenant y', y'', y'''... etc. chaque raison de la suite D, et par conséquent chaque raison de la suite C (473), approche toujours de la raison de a à b. 2.° Pour rendre la raison de $x : y$ égale à la raison de $a : b$, il faudrait supposer que x et y sont o, et que cependant il y a une raison proprement dite entre ces quantités ; ce qui est contradiotoire (*alg.* 202) ; donc la raison de $x : y$ n'atteint jamais à la raison de $a : b$. 3.° Cependant x et y pouvant chacune approcher de o de plus près qu'une quantité donnée, quelque petite qu'on la suppose, la raison de $x : y$ pourra aussi approcher de celle de $a : b$ de plus près qu'une quantité donnée, quelque petite qu'elle soit. Donc (460) cette raison de $a : b$ a toutes les propriétés qui doivent caractériser la vraie limite des raisons entre les variables x et y qui tendent à s'évanouir.

475. Corollaire I. On conclura de là que si dans une courbe RMA (fig. 146) les différences des deux coordonnées, savoir RN et MN, ainsi que la corde interceptée RM, décroissent jusqu'à s'évanouir, par le rapprochement continuel du point R vers le point M, *la limite géo-*

métrique du rapport des deux différences RN *et* MN *sera le rapport de l'ordonnée* MQ *à sa sous-tangente* QT; *que la limite du rapport de la corde* RM, *à la différence* MN *des deux abscisses, sera le rapport de la tangente* MT *à la sous-tangente* QT; *et que la limite du rapport de la même corde* RM *à la différence* RN *des deux ordonnées, sera le rapport de la tangente* MT *à l'ordonnée* MQ. Car quelque part qu'aboutisse ce point R dans l'arc RR'M, le triangle RMN étant semblable au triangle RSP, on aura toujours RN :MN : RM :: RP : PS : RS. Or, quand les trois premières lignes, savoir RN, MN, RM, deviennent o, RP devient MQ, PS devient QT, RS devient MT. Donc (474) les raisons entre ces dernières lignes MQ, QT, MT, sont les vraies limites des raisons qui régnaient entre les premières.

476. Corollaire II. Il suit de là *que la condition qui donne la dernière raison dans une suite de quantités décroissantes jusqu'à* o, *est de supposer ces quantités égales à* o. C'est par là qu'on trouvera dans une suite parallèle de raisons entre des quantités qui ne s'évanouissent pas, l'expression analytique de cette dernière raison; et si d'ailleurs on en connaît aussi l'expression géométrique, on pourra de ces deux raisons égales former une proportion, et trouver par ce moyen la valeur de quelqu'un des termes qui entreront dans la proportion.

477. Par exemple, supposons que la courbe RMA soit une parabole ordinaire, et proposons-nous de trouver d'après son équation $yy = px$, l'expression analytique de la dernière raison entre les différences variables RN, MN, des deux coordonnées aux deux points R et M; appelons z la différence décroissante des deux ordonnées, telles que RP et MQ, R'P' et MQ, R''P'' et MQ, etc., laquelle différence tend à s'évanouir; appelons u la différence décroissante des abscisses correspondantes, laquelle devient successivement MN, MN', MN''... etc. A la place de y, nous avons donc $y + z$, et à la place de x, nous avons

$x+u$ (*). Donc l'équation de la courbe devient $yy+2yz+zz=px+pu$. Otant la première de celle-ci on a, $2yz+zz=pu$; ce qui donne $p:2y+z::z:u$. Or, si l'on suppose ici $z=0$ et $u=0$, ainsi qu'il le faut nécessairement pour avoir la dernière raison de z à u, la raison correspondante devient $p:2y$, c'est-à-dire, que la dernière raison entre les différences z et u qui décroissent jusqu'à s'évanouir, est exprimée algébriquement par la raison de $p:2y$. Or, l'expression géométrique de cette même raison est la raison de l'ordonnée MQ à la sous-tangente QT (475). Nous pouvons donc dire $p:2y::$ MQ : QT; ou bien, puisque MQ est y, $p:2y::y:$ QT $=\frac{2yy}{p}=\frac{2px}{p}=2x$, c'est-à-dire, que par cette méthode, ainsi que par la méthode ordinaire (444) on trouve dans cette courbe la sous-tangente double de l'abscisse correspondante.

478. Scolie I. Quoique la suite des raisons C du théorème précédent offre cette expression $o:o=a:b$, on n'en doit pas conclure que nous ayons voulu établir une raison entre o et o, moins encore égaler cette raison à celle des quantités réelles a et b. Ce n'est là qu'un signe indiquant la présence de la dernière raison, laquelle est ici $a:b$, et se trouve seulement dans la suite parallèle D.

Cette expression $o:o$ ne peut même servir de caractéristique générale pour désigner la présence d'une dernière raison, parce qu'elle ne ferait pas connaître les variables auxquelles se rapporterait cette raison; il est plus simple d'écrire ces variables mêmes avec un signe convenu annonçant la présence de leur dernière raison. Newton les écrit avec un point sur chacune; Leibnitz les fait précéder de la lettre d; ainsi pour désigner que la

(*) On voit assez que cette différence z (et il en est de même de u) est positive ou négative, suivant qu'on soustrait la plus petite ordonnée de la plus grande, ou la plus grande de la plus petite.

dernière raison de x à y vaut celle de $a : b$, on écrirait, d'après la notation du premier, $\dot{x} : \dot{y} = a : b$, et d'après celle du second, $dx : dy = a : b$, sans que, pour cela, $\dot{x}$ et $\dot{y}$, ou dx, dy soient des quantités réelles, et cessent de tenir la place de zéro. Tous les géomètres, hors les anglais, ont adopté la notation leibnitienne, c'est aussi celle que nous allons suivre.

479. Scolie II. Quoique deux quantités ne puissent point exister, rien n'empêche qu'on ne conçoive distinctement le rapport qu'elles auraient entre elles si elles existaient. Par exemple, on ne peut se représenter comme réellement existantes des progressions géométriques d'un nombre infini de termes comme seraient celles-ci $\frac{1}{1} : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} \ldots$ etc. ou bien $\frac{1}{1} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81} \ldots$ etc. ; cependant on conçoit clairement que, si elles existaient, la somme de la première serait double de celle de la seconde (*alg.* 262). Ce que nous avons dit (*alg.* 280, 281) nous offre plusieurs propriétés des nombres qui confirment cette vérité.

De même, quoiqu'on ne puisse admettre comme *quantités réelles*, les dernières valeurs dy, dz, de deux variables y, z, qui décroissent jusqu'à s'évanouir, on conçoit cependant que *si elles étaient réelles*, leur rapport $dy : dz$ représenterait, d'après le théorème III, la dernière raison entre ces variables décroissantes y, z. Donc, dans cette hypothèse, on aurait deux expressions de cette dernière raison, l'une *vraie*, prise d'après le théorème V, dans la suite parallèle entre des quantités réelles, que je suppose exprimée par $p : q$; l'autre *fictive*, représentée, d'après le théorème III, par $dy : dz$; et qu'ainsi on pourrait égaler ensemble ces deux expressions de la même raison, ce qui donnerait $dy : dz = p : q$.

Mais puisque dans cette hypothèse, dy, dz, en même temps qu'elles seraient supposées des quantités (*bien qu'elles ne le fussent pas*) n'en seraient pas moins les limites des variables y, z, qui tendent à s'évanouir, elles de-

vraient, sous ce dernier rapport, être supposées plus petites que toute valeur qu'on peut assigner dans la suite des variables y, z, décroissantes jusqu'à zéro. Donc en supposant que dy, dz, fussent des quantités, il faudrait encore les supposer *plus petites que toute quantité assignable*; et de cette condition, sans laquelle la première hypothèse ne peut être admise, s'ensuivent plusieurs conséquences importantes.

480. 1.° *Les dernières valeurs* dy, dz, *admises comme quantités, sont susceptibles de toute sorte de rapports entre elles*; car nous venons de voir que, dans cette hypothèse, le rapport $dy : dz$ doit égaler la dernière raison des variables y, z, prise dans la suite parallèle. Or cette dernière raison pouvant varier à l'infini, suivant les diverses combinaisons des variables y, z, il en sera de même de $dy : dz$.

481. 2.° *Les mêmes valeurs fictives* dy, dz, *ne peuvent admettre aucun rapport assignable avec une quantité déterminée* k. Car si ce rapport était assignable, et qu'on pût supposer $dy : k :: m : n$, on aurait $dy = \frac{km}{n}$, d'où l'on pourrait déduire l'expression d'une infinité de quantités $\frac{km}{2n}$, $\frac{km}{3n}$, $\frac{km}{4n}$, etc. toutes plus petites que dy; ce qui renverserait l'hypothèse de dy plus petite que toute quantité assignable.

482. 3.° *Les quantités feintes* dy, dz, *ne peuvent augmenter par l'addition ni diminuer par la soustraction une quantité réelle quelconque.* Car si on avait $m + dy > m$, on pourrait supposer $m + dy = n$, ce qui donne $dy = n - m$, et partant une infinité de quantités plus petites que dy, telles que $\frac{n-m}{2}$, $\frac{n-m}{3}$, $\frac{n-m}{4}$, etc. Pareillement, si l'on admettait $m - dy < m$, on pourrait supposer $m - dy = p$, ou bien $m - p = dy$, ce qui présenterait encore une in-

finité de quantités possibles $\frac{m-p}{2}$, $\frac{m-p}{3}$, $\frac{m-p}{4}$, etc. toutes plus petites que dy.

483. SCOLIE III. L'hypothèse par laquelle on suppose des valeurs (quoiqu'elles n'en ayent pas) aux limites ou dernières valeurs dy, dz, permet de considérer ces *quantités fictives* elles-mêmes comme de nouvelles variables, dont on peut chercher la dernière raison. Alors leurs nouvelles limites deviennent limites de limites, ou *limites du second ordre*, et sont désignées par la double caractéristique dd en cette manière, ddy, ddz. Dans ce cas, on obtient la dernière raison comme dans le premier; savoir, par une suite parallèle de raisons entre des quantités qui ne s'évanouissent pas, lorsque les nouvelles variables dy, dz, parviennent à zéro. L'on peut, d'après le même principe, se représenter des limites du troisième, du quatrième ordre, etc. sans que rien borne les possibilités à cet égard; et ce que nous avons dit ci-dessus de dy, dz, relativement à y et à z, doit s'entendre de ddy, ddz,, relativement à dy, dz, et, en général, de tous les ordres inférieurs de limites comparés aux supérieurs.

484. Il suit de là que si on multiplie l'une par l'autre deux limites ou dernières valeurs du premier ordre dy, dz, leur produit $dy \times dz$ sera une limite du second ordre, puisque $dy \times dz : dy :: dz : 1$. Or, $dz : 1$ est plus petit que tout rapport assignable; donc $dy \times dz : dy$ l'est également; c'est-à-dire, que $dy \times dz$ doit être pris pour 0 par rapport à dy. De même $dx \times dy \times dz : dy \times dz :: dx : 1$; et, en général, *quand on multiplie l'une par l'autre les expressions de plusieurs limites du premier ordre, le produit est d'un ordre indiqué par le nombre des facteurs du premier ordre qu'il contient.*

485. SCOLIE IV. On ne compare pas toujours terme à terme une série de quantités décroissantes jusqu'à s'évanouir avec une autre série semblable, ni par conséquent la limite de la première avec celle de la seconde. Dans le calcul une li-

mite de décroissements est souvent considérée seule et dans un sens absolu ; alors elle est prise pour zéro, comme elle l'est en effet. Par exemple, quand on dit que dans une progression géométrique de fractions décroissantes sans fin, comme $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$... etc. La somme vaut le premier terme dont le dénominateur est diminué d'une unité, on n'attribue aucune valeur à la limite de la progression, parce qu'on n'a point à la comparer avec une autre, et on la prend pour zéro telle qu'elle est en soi. Ainsi les dernières valeurs des quantités évanouissantes, sont considérées dans le calcul de deux manières différentes, *ou seules et comme limites absolues de décroissements, et on les prend alors pour zéro, ou comparées entre elles, comme si elles étaient les termes d'une dernière raison, et on leur suppose, dans ce cas, une valeur qu'elles n'ont point*, parce que cette hypothèse fait parvenir plus facilement à l'expression de la dernière raison.

486. Après ce qui a été dit dans les scolies précédents, il sera aisé de se faire des idées exactes sur ce qu'on doit entendre en géométrie par les *infiniment petits* et les *infiniment grands*. Les premiers ne sont autre chose que *les limites ou dernières valeurs des quantités variables qui décroissent jusqu'à s'évanouir* ; par conséquent, ils ne sont ni ne peuvent être des *quantités réelles*, et tout ce qu'on a dit ci-dessus des dernières valeurs des quantités évanouissantes s'applique immédiatement aux infiniment petits, et la caractéristique, pour les désigner, est la même.

487. Quant à l'*infiniment grand* ou simplement l'*infini*, nous dirons que *c'est la dernière valeur d'une quantité qui croit au-delà de tout terme assignable*, ou bien *qui peut devenir plus grande qu'une quantité donnée quelconque*. Qu'ainsi *l'infini n'est pas une quantité*, puisqu'il n'est pas susceptible d'augmentation ; il est pour les quantités croissantes ce qu'est zéro pour les décroissantes ; c'est-à-dire, une dernière valeur, une limite d'accroissements ;

que dans le calcul cette dernière valeur est considérée sous deux rapports différents, ou *seule et comme limite absolue*, ou *comparée avec une autre limite*. Sous le dernier rapport, ces limites qu'on compare sont supposées des quantités, quoiqu'elles ne le soient pas, afin de trouver plus promptement l'expression véritable de la dernière raison, qui, ici comme dans les quantités évanouissantes, est prise dans une suite parallèle de quantités qui restent finies et déterminées, lorsque les autres sont supposées plus grandes que toute valeur assignable.

488. Mais de quelque manière qu'on considère l'infini, soit comme limite d'accroissements, soit comme terme d'une dernière raison, il ne peut avoir aucun rapport assignable avec une quantité donnée a. Car si ce rapport était assignable, c'est-à-dire, s'il pouvait être représenté par celui de deux nombres donnés m et n, on aurait $\infty : a :: m : n$, donc $\infty = \frac{am}{n}$, ce qui renverse la supposition d'une limite plus grande que toute quantité assignable.

489. Il suit de là, 1.° que toute fraction qui a pour numérateur une quantité donnée, et pour dénominateur l'infini, comme $\frac{a}{\infty}$, est o. Car elle est la limite d'une suite de fractions $\frac{a}{1}, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{4} \ldots \frac{a}{\infty}$, qui ont le numérateur constant et le dénominateur toujours croissant, laquelle limite est nécessairement o (460).

490. 2.° Qu'une quantité donnée quelconque ajoutée ou soustraite à l'infini, ne saurait le changer, ou bien que $\infty \pm a = \infty$, et qu'il n'y a point là, à proprement parler, d'addition ni de soustraction; car $\infty \pm a : \infty :: 1 \pm \frac{a}{\infty} : 1$ (en divisant chaque terme par ∞). Or, $1 \pm \frac{a}{\infty} : 1 :: 1 : 1$, puisque nous venons de voir que $\frac{a}{\infty}$ est o. Donc $\infty \pm a = \infty$.

491. 3.° Par ce que nous avons dit, on voit encore dans quel sens il faut prendre cette expression $\frac{0}{0} = 1$, qu'on trouve souvent dans le calcul; car cela signifie que 1 est la limite, à laquelle tend une suite de fractions, dont les numérateurs et les dénominateurs décroissent toujours jusqu'à s'évanouir, comme serait, par exemple, celle-ci $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}, \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}}, \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}} \ldots\ldots \frac{0}{0}$. Et en effet cette suite vaut celle-ci, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \ldots\ldots \frac{\infty}{\infty} = 1$, dans laquelle le numérateur et le dénominateur de chaque fraction, tendant toujours à l'égalité, la limite est nécessairement une fraction, qui a ses deux termes égaux, ou qui vaut 1.

Si on supposait la série décroissante sans fin $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \ldots\ldots 0$, divisée terme à terme par $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots\ldots 0$, on aurait $\frac{0}{0} = 2$; ce qui signifie que dans ce cas la limite des quotients serait 2. En effet, la série de ces quotients serait alors les fractions $\frac{2}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, \frac{12}{7} \ldots\ldots$ etc. dans lesquelles les numérateurs tendent sans cesse à devenir doubles des dénominateurs, puisque ce qui leur manque pour l'être décroît suivant cette progression $\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7} \ldots$ etc. à l'infini. Dans une autre hypothèse, cette limite serait exprimée par un autre nombre; de façon que $\frac{0}{0}$, pris comme *symbole de limite* entre des quantités décroissantes sans fin et divisées l'une par l'autre, peut annoncer un nombre quelconque servant de limite à ces quotients, sans que de là on puisse conclure qu'on a divisé réellement 0 par 0, ou qu'on a admis une raison proprement dite entre 0 et 0; ce qui renverserait tous les principes.

CHAPITRE II.

Contenant les principes du calcul différentiel.

492. DÉFINITION. Le calcul différentiel n'est autre chose que la méthode de résoudre, dans tous les cas, le problème suivant : *Connaissant la loi qui règne entre deux variables* x *et* y ; *et désignant par* D x (*) *la différence finie de deux valeurs de* x, *par* D y *la différence finie des valeurs correspondantes de* y, *trouver l'expression algébrique de la derniere raison entre les différences finies* D x *et* D y, *quand elles décroissent jusqu'à s'évanouir en même temps.* Par exemple, connaissant d'après l'équation de la courbe RMA (FIG. 146) la loi qui règne entre ses ordonnées et ses abscisses ; et supposant que RN soit la différence finie des deux ordonnées RP, MQ ; et MN celle de leurs abscisses correspondantes AP, AQ, on se propose, par le calcul différentiel, de trouver la limite des rapports, ou bien la dernière raison entre les différences RN, MN, qu'on suppose décroissantes jusqu'à s'évanouir en même temps.

Or, nous avons vu (474) que pour trouver la limite des raisons qui règnent entre des quantités qu'on suppose décroître jusqu'à s'évanouir, comme sont ici les différences finies Dx, Dy, il faut avoir une suite parallèle de raisons, formée par des quantités qui ne s'évanouissent pas, et prendre dans cette suite la raison des termes qui correspondent à Dx et Dy, devenus o ; ou bien qu'il faut simplement supposer ces différences Dx, Dy, égales à o (476), et voir ce que devient, d'après cette supposition, la raison des termes correspondants dans la suite parallèle, pour faire de cette raison la limite cherchée. C'est

(*) La lettre D n'est ici qu'une caractéristique, servant à désigner la différence finie entre les deux valeurs d'une même variable.

ainsi que nous avons procédé dans le chapitre précédent, (477), quand nous avons déterminé la limite des rapports entre les différences finies RN, MN, des coordonnées d'une parabole; et par une semblable méthode, on exprimera toujours en termes finis la dernière raison entre les différences finies Dx, Dy, des coordonnées d'une courbe, pourvu qu'il n'entre dans son équation d'autres indéterminées que y et x.

493. Soit, par exemple (350), l'équation au cercle $yy = 2ax - xx$; substituons d'abord $y + Dy$ pour y et $x + Dx$ pour x; ce qui donnera, $y^2 + 2yDy + (Dy)^2 = 2ax + 2aDx - x^2 - 2xDx - (Dx)^2$; et soustrayant la première de celle-ci, on a $2yDy + (Dy)^2 = 2aDx - 2xDx - (Dx)^2$, et c'est là *l'équation aux différences finies*. Cherchant dans cette équation les deux suites parallèles de raisons du théorème V, on a pour l'origine de ces deux suites $Dy : Dx = 2a - 2x - Dx : 2y + Dy$; enfin supposant que les variables décroissantes Dx, Dy, s'évanouissent ou sont o, afin de découvrir la dernière raison dans la suite parallèle, on a $o : o = 2a - 2x : 2y = a - x : y$ pour expression de la dernière raison entre les différences décroissantes Dx, Dy. Ce qui se désignerait, dans la notation de Leibnitz, par $dx : dy :: a - x : y$.

494. Si on veut employer sa méthode de différentiation, la même, quant au fond, que celle que nous venons de suivre d'après nos principes, on dira que ces différences sont *infiniment petites*; on les considérera d'abord *comme quantités*, pour pouvoir substituer $x + dx$ à x et $y + dy$ à y, et obtenir ainsi l'équation aux différences (ce qui répond à nos différences finies Dx, Dy): puis comme *plus petites que toute quantité assignable*, pour pouvoir les négliger quand le calcul l'exigera (ce qui revient à Dx, Dy supposées zéro) (*).

(*) Ce que nous venons de dire met hors de doute une observation importante sur cette matière, c'est que dans le système de

495. Les différences des coordonnées y et x considérées ainsi d'après le système et la notation de Leibnitz, seront donc désignées par la caractéristique d, de cette manière dx, dy ; et nous les appellerons des *différentielles* ou *des différences infiniment petites*, ou simplement encore des *différences*; car, par ce mot, on n'entend dans ce calcul que des différences infiniment petites. Nous pourrons donc distinguer divers ordres de différences, ainsi que nous avons distingué précédemment divers ordres de limites et d'infinis, et nous appellerons *différences premières* celles du premier ordre, qui seront désignées par la simple caractéristique d : *différences secondes*, ou différences de différences, celle du second ordre, indiquées par la double caractéristique dd ou d^2, en cette manière ddx, d^2x; ce qui désigne *différence seconde* de x; de même $dddx$ ou d^3x désignera la *différence troisième* de x : d^4x, *la différence quatrième*, *etc.* de sorte que dans ce calcul la lettre d n'exprimant aucune quantité, et la lettre x en exprimant une dont on ne s'occupe pas, on ne peut ni supprimer ni écrire l'une sans l'autre.

496. Remarques. Puisque différentier n'est autre chose que chercher l'expression finie de la dernière raison entre des quantités qui décroissent jusqu'à s'évanouir, et que

---

Leibnitz on prend les *infiniment petits* dans deux sens diamétralement opposés; tantôt comme quantités finies et réelles, tantôt comme zéro, et qu'on *doit nécessairement procéder ainsi pour parvenir à l'expression exacte de la dernière raison*. Mais comme Leibnitz n'emploie dans les deux cas que la même caractéristique dx, dy, il y a évidemment une équivoque grave dans cette caractéristique ; c'est là la source des obscurités et des reproches vraiment fondés qu'on n'a cessé de faire sur la métaphysique du calcul infinitésimal. Cette équivoque reconnue n'en est plus une, et il nous reste des règles infiniment simples et commodes pour les différentiations; d'ailleurs on n'entendrait plus les ouvrages de presque tous les géomètres modernes, écrits d'après la notation et les principes de Leibnitz, si on cessait de suivre son système dans les éléments. C'est sur ces considérations que nous l'adoptons ici *après l'avoir pleinement justifié*.

pour

pour trouver cette expression, il faut deux suites parallèles de raisons, dont l'une renferme des quantités qui s'évanouissent, et l'autre des quantités qui ne s'évanouissent pas ; il s'ensuit qu'on ne peut différencier que des *équations*, et non point de *simples quantités* ; car il n'y a qu'une équation qui puisse fournir une proportion, ou bien deux raisons égales qui seront chacune l'origine des deux suites parallèles de raisons qu'il faut nécessairement avoir pour différencier. Et si, dans la suite, nous différencions des *quantités absolues*, il restera sous-entendu qu'elles sont supposées former un membre d'équation, et qu'étant combinées avec celles qui forment l'autre membre, on en peut déduire deux raisons égales, qui donnent naissance aux deux suites parallèles de raisons dont on a besoin ici.

497. II. Lorsque nous voudrons indiquer une différenciation à faire, nous renfermerons la quantité qui doit être différenciée entre deux crochets, précédés de la caractéristique, de cette manière $d(x)$, $d(ay+x)$, $d(x^2)$, etc. Lorsque nous aurons à exprimer le produit d'une différentielle multipliée par elle-même, comme $dx \times dx$, nous écrirons dx^2 : pour $dx \times dx \times dx$, nous écrirons dx^3 ; etc. Il faudra donc bien distinguer ces trois expressions d^2x, dx^2, $d(x^2)$; car la première désignera la différence seconde de x: la seconde, la différence première de x multipliée par elle-même ; et la troisième, une différenciation à faire sur x^2.

498. Règle générale. Pour différencier une quantité, 1.° *Substituez à la place de chaque variable, cette même variable ± sa différence, selon que la variable augmentera ou diminuera :*

2.° *Du résultat retranchez la quantité proposée, et le reste sera la différence cherchée.*

Dans les applications que nous allons faire de cette règle, nous ne regarderons comme variables que les quantités représentées par u, x, y, z, à moins que nous n'avertissions du contraire.

Exemple I. On demande la différence de $a+x+y$. Je

substitue $x \pm dx$ au lieu de x, et $y \pm dy$ au lieu de y; ce qui change la quantité proposée en celle-ci, $a + x \pm dx + y \pm dy$. Je retranche la proposée, et il vient, réduction faite, $\pm dx \pm dy$.

499. COROLLAIRE. Il suit de là que *l'on aura tout de suite la différence d'une somme de quantités, en effaçant les termes constants, et substituant, à la place de chaque terme variable, sa différence.* Ainsi $d(a - x) = -dx$, ou $+dx$ selon que x augmente ou diminue, ce qui est d'ailleurs évident.

500. EXEMPLE II. On demande la différence de ax. Je substitue $x \pm dx$ au lieu de x, et j'ai $a \times \overline{x \pm dx} = ax \pm adx$. Donc retranchant la donnée ax, $d(ax) = \pm adx$. Ce qui fournit cette règle : *la différence du produit d'une constante et d'une variable, vaut le produit de la quantité constante, multipliée par la différence du facteur variable.* Ainsi $d(axy) = a \times d(xy)$.

501. EXEMPLE III. Cherchons la différence de xy. Il faut mettre $x \pm dx$ au lieu de x, et $y \pm dy$ au lieu de y, ce qui changera le produit proposé en celui-ci, $\overline{x \pm dx} \times \overline{y \pm dy} = xy \pm ydx \pm xdy + dx\,dy$; donc $d(xy) = \pm ydx \pm xdy + dx\,dy$, ou bien (483 et 484) $d(xy) = \pm ydx \pm xdy$. Pour la même raison $d(xyz) = (\overline{x \pm dx} \times \overline{y \pm dy} \times \overline{z \pm dz}) - xyz = \pm yzdx \pm xzdy \pm xydz$, etc. D'où il suit que *pour avoir la différence d'un produit dont les facteurs sont variables, il faut différencier ce produit pour chaque variable, comme si tout le reste était constant, et prendre ensuite la somme de ces différences pour la différence cherchée.* Si l'on supposait les facteurs variables égaux, le produit serait une puissance que l'on différencierait de même ; mais nous allons la différencier d'une manière plus générale.

502. EXEMPLE IV. Pour avoir $d(x^m)$. Je mets $x \pm dx$ au lieu de x, ce qui change x^m en $\overline{x \pm dx}^m = x^m \pm m x^{m-1} \times dx + \frac{m.\overline{m-1}}{2} x^{m-2} dx^2 \pm$, etc. (*alg.* 137) : soustrayant la proposée x^m (498), et rejetant les termes qui renferment

plusieurs différentielles pour facteurs (484), on aura $d(x^m) = \pm mx^{m-1} . dx$. *Pour avoir donc la différence d'une variable* x *qui a un exposant* m *constant, il faut mettre* -1 *à la suite de son exposant, ce qui donne ici* x^{m-1}, *multipliant ensuite ce résultat* x^{m-1} *par le premier exposant* m, *et par la différence* $\pm dx$ *de la racine, le produit* $\pm mx^{m-1} dx$ *sera la différence demandée.* Ainsi $d(z^n) = \pm nz^{n-1} dz$.

Si l'on fait dans la dernière expression $n = \frac{1}{2}$, ce qui donne $z^n = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$, et $z^{n-1} = z^{\frac{1}{2}-1} = z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{z}}$, on aura $d(\sqrt{z}) = \frac{\pm\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z}}$. Si l'on eût fait $n = -p$, on aurait eu $d(z^{-p}) = \mp pz^{-p-1} dz = \frac{\mp p dz}{z^{p+1}}$.

Soit $z = (a^2 - x^2)$, on aura $d((a^2 - x^2)^n) = \pm n(a^2 - x^2)^{n-1} \times d(a^2 - x^2) = \pm n(a^2 - x^2)^{n-1} \times -2xdx = \mp 2nxdx(a^2 - x^2)^{n-1}$.

Si $n = -1$, il vient $d(z^{-1}) = \mp z^{-1-1} . dz = \frac{\mp dz}{z^2}$. Mais $z^{-1} = \frac{1}{z}$; donc $d\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\mp dz}{z^2}$.

503. Pour avoir la différence d'une fraction $\frac{u}{z} = u \times \frac{1}{z}$, on fera (501) $d\left(\frac{u}{z}\right) = \frac{+1}{z} du \pm u d\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\pm du}{z} \mp \frac{udz}{z^2} = \frac{\pm zdu \mp udz}{z^2}$; ainsi *pour différencier une fraction* $\frac{u}{z}$, *il faut prendre le produit* $(\pm z\,du)$ *du dénominateur, multiplié par la différence du numérateur; ensuite le produit* $(\pm u\,dz)$ *du numérateur, multiplié par la différence du dénominateur; soustraire le second produit du premier, et diviser enfin le reste* $(\pm z\,du \mp u\,dz)$ *par le quarré* z^2 *du dénominateur.*

Si le numérateur u était une quantité constante a, on ferait $du = da = 0$, ce qui donnerait, $d\left(\frac{a}{z}\right) = \frac{\mp adz}{z^2}$:

si l'on fait seulement le dénominateur z constant, on aura $dz = 0$; ainsi $d\left(\frac{u}{b}\right) = \frac{\pm b\,du}{b^2} = \frac{\pm du}{b}$. Soit $u = x^m$, $b = m$, nous aurons $d\left(\frac{x^m}{m}\right) = \frac{\pm m x^{m-1}}{m} dx = \pm x^{m-1} dx$. Ainsi les applications que nous avons faites de la règle générale (498) font voir comment on doit différencier les quantités variables; et les règles particulières que les résultats nous ont données, fournissent le moyen d'en abréger le calcul dans les divers cas.

504. COROLLAIRE. Soient les deux fractions $\frac{m}{x}$, $\frac{m}{x'}$; qui ayent un même numérateur constant, et supposons que $dx = dx'$: cela posé, on aura $d\left(\frac{m}{x}\right) = \frac{\mp m\,dx}{x\,x}$, et $d\left(\frac{m}{x'}\right) = \frac{\mp m\,dx'}{x'\,x'}$. Donc $d\left(\frac{m}{x}\right) : d\left(\frac{m}{x'}\right) :: \frac{\mp m\,dx}{x\,x} : \frac{\mp m\,dx'}{x'\,x'} :: \frac{m}{x\,x} : \frac{m}{x'\,x'} :: \frac{m\,m}{x\,x} : \frac{m\,m}{x'\,x'} :: \left(\frac{m}{x}\right)^2 : \left(\frac{m}{x'}\right)^2$. C'est-à-dire, que *dans ces sortes de fractions les différences sont proportionnelles aux quarrés de ces mêmes fractions*, ou bien *que la dernière raison entre leurs différences est la raison de leurs quarrés.*

Or, dans l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, les ordonnées qui répondent aux abscisses x, x', peuvent être représentées par ces fractions $\frac{m}{x}$, $\frac{m}{x'}$ (429); donc, si on suppose les différences de ces abscisses, savoir dx, dx', égales, *les différences des ordonnées seront comme les quarrés de ces mêmes ordonnées*, ainsi que nous l'avons prouvé plus haut (430) d'une autre manière.

505. Outre les différences premières, on fait souvent usage dans ce calcul des *différences secondes*; et pour trouver celles-ci, il faudra les prendre sur les différences premières, de la même manière que ces dernières ont été prises sur les quantités données (498), en regardant

comme de nouvelles variables les dx, dy, etc. des variables x, y, etc. (nous prendrons les formules précédentes avec le signe supérieur).

506. Exemples. $d^2(ax) = d(adx) = ad^2x$ (498)..... $d^2(xy) = d(xdy + ydx) = d(xdy) + d(ydx) = x\,d^2y + dxdy + dydx + yd^2x = xd^2y + 2\,dxdy + yd^2x$. Si l'on supposait dx constante, on aurait $d^2x = 0$, ainsi alors $d^2(xy) = x\,d^2y + 2\,dxdy$.

507. En supposant que la différence dx d'une variable x est constante, on simplifie souvent les calculs; c'est pourquoi nous ferons usage par la suite de cette supposition.

$d^2(x^m) = d(mx^{m-1}dx) = mx^{m-1}d^2x + m.\overline{m-1}.x^{m-2}.dx^2$. Si dx est constante, on a, $d^2x = 0$; ainsi $d^2(x^m) = m.\overline{m-1}.x^{m-2}dx^2$.

Soit $x = z$, et $m = \frac{1}{2}$, nous aurons $dx = dz$, $d^2x = d^2z$, $x^{m-1} = z^{\frac{1}{2}-1} = z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{z}}$, $x^{m-2} = z^{\frac{1}{2}-2} = z^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{z^3}} = \frac{1}{z\sqrt{z}}$. Substituant dans la première expression de $d^2(x^m)$, il vient $d^2\sqrt{z} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{z}} d^2z + \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times \frac{1}{z\sqrt{z}} \times dz^2 = \frac{d^2z}{2\sqrt{z}} - \frac{dz^2}{4z\sqrt{z}} = \frac{2z\,d^2z - dz^2}{4z\sqrt{z}}$.

Soit maintenant $z = px \mp \frac{px^2}{2a}$, et faisons dx constante, nous aurons $dz = pdx \mp \frac{pxdx}{a}$; donc $d^2z = \mp \frac{pdx^2}{a}$; ou, en multipliant par la valeur de z, $zd^2z = \mp \frac{p^2xdx^2}{a} + \frac{p^2x^2dx^2}{2a^2}$. Substituant ces valeurs de zd^2z et de dz dans $d^2\sqrt{z}$, que nous avons eu précédemment, il vient, réduction faite, $d^2\sqrt{\left(px \mp \frac{px^2}{2a}\right)} = \frac{-p^2dx^2}{4\left(px \mp \frac{px^2}{2a}\right)\sqrt{\left(px \mp \frac{px^2}{2a}\right)}}$.

508. Dans l'ellipse et l'hyperbole on a (384 et 401) $y^2 = px \mp \frac{px^2}{2a}$: le signe supérieur est pour l'ellipse, et l'inférieur pour l'hyperbole. On a donc aussi $y = \sqrt{\left(px \mp \frac{px^2}{2a}\right)}$; ou $d^2y = d^2\sqrt{\left(px \mp \frac{px^2}{2a}\right)} = \frac{-p^2dx^2}{4y^3}$. On aurait la même valeur pour d^2y, d'après l'équation $y^2 = px$, et l'une et l'autre de ces valeurs nous serviront dans la suite.

509. Proposons-nous de trouver la valeur de d^2y par l'équation $dy = \frac{dx}{x}\sqrt{2ax - x^2}$, nous aurons, dx étant constante, $d^2y = \frac{dx}{x}\,d(\sqrt{2ax - x^2}) + \sqrt{2ax - x^2} \times d\left(\frac{dx}{x}\right)$, (498); or $d\sqrt{2ax - x^2} = \frac{a\,dx - x\,dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$, $d\left(\frac{dx}{x}\right) = \frac{-dx^2}{x^2}$: donc $d^2y = \frac{a\,dx^2 - x\,dx^2}{x\sqrt{(2ax - x^2)}} - \frac{dx^2\sqrt{(2ax - x^2)}}{x^2}$ $= \frac{(a\,dx^2 - x\,dx^2)\,x - dx^2\,(2ax - x^2)}{x^2\sqrt{(2ax - x^2)}} = \frac{-a\,dx^2}{x\sqrt{(2ax - x^2)}}$.

510. *Différences des sinus, etc.* Si dans un cercle l'on imagine un arc différentiel M*m* (FIG. 147), son sinus *m*P, sa tangente M*t*, sa sécante C*t*, et qu'on mène *mr* parallèle à CM, les triangles CP*m*, *mrt*, donneront CP : P*m* :: *mr* ou PM : *rt*. Or, (482) P*m* doit être négligé par rapport à CP. Donc aussi *rt* doit être rejeté par rapport à M*r* ou MP. D'ailleurs PM est (274) de l'espèce des différences secondes; donc *rt* sera de l'espèce des différences troisièmes. Or, $rt = Mt - Pm$. Donc la différence du sinus et de la tangente d'un arc différentiel est nulle; ou bien le sinus et la tangente d'un arc différentiel doivent être regardés comme des lignes égales. Pareillement la corde qui est plus grande que le sinus, et l'arc qui est plus petit que la tangente, seront des lignes égales entre elles et égales aux deux premières.

Cela posé, pour avoir la différence du sinus d'un arc

donné AM $= x$ (FIG. 148), je suppose que Mm soit la différence de cet arc; je mène ensuite les rayons CA, CM, les sinus MP, mp; et Mr parallèle à CA. Les triangles CPM, mrM, donneront, CM : CP :: mM : mr. Or, CP $= cos$ AM $= cos\ x$; mM $= dx$; $mr = d$(MP) $= d\ (sin\ x)$; donc en faisant le rayon CM $= r$, on aura, $r : cos\ x :: dx : d(sin\ x) = \frac{dx\ cos\ x}{r}$. C'est-à-dire, *que la différence du sinus d'un arc vaut la différence de cet arc multipliée par le cosinus du même arc, et divisée par le rayon.*

511. Pareillement si l'on nomme un autre arc du même cercle x', on aura $d\ (sin\ x') = \frac{dx'\ cos\ x'}{r}$; ainsi en supposant $dx = dx'$, nous aurons $d\ (sin\ x) : d\ (sin\ x') :: cos\ x : cos\ x'$. Or, si $x < x'$, $cos\ x$ sera $> cos\ x'$. Donc *les différences des sinus des petits arcs sont plus grandes que celles des sinus des grands arcs.*

512. Les mêmes triangles CMP, mrM, donnent, CM : PM : mM : Mr, ou $r : sin\ x :: dx$: M$r = \frac{dx\ sin\ x}{r}$. Ainsi Cp = CP — M$r = cos\ x - \frac{dx\ sin\ x}{r}$. Donc $d\ (cos\ x) = \frac{-dx\ sin\ x}{r}$. Ou bien *la différentielle du cosinus d'un arc vaut le sinus de cet arc, multiplié par sa différentielle, prise avec un signe contraire et divisée par le rayon.*

On pourrait, de la même manière, trouver les expressions différentielles de la tangente, de la cotangente, etc.

513. *Différences des logarithmes.* Si, sur une droite AB (FIG. 149) on prend des parties aP, ap, aQ, aq, etc. en proportion ou en progression arithmétique, et si sur leurs extrémités, on élève des perpendiculaires PM, pm, QN, qn, etc. en proportion ou en progression géométrique, la courbe bMmNn, qui passera par les extrémités de ces perpendiculaires, s'appellera *logarithmique*, et cette dénomination est fondée sur ce que, en supposant 1, la perpen-

diculaire ab, qui répond à l'origine a des abscisses aP, ap, etc. ces mêmes abscisses sont les logarithmes des ordonnées correspondantes.

514. Soit $aP = x$, $Pp = Qq = dx$, on aura $aP . ap : aQ . aq$, et par conséquent $PM : pm :: QN : qn$, ou $pm - PM : PM :: \eta n - QN : QN$; ou bien $mr : PM :: ns : NQ$. Or, en menant les tangentes MT, NF, et les lignes Mr, Ns, parallèles à l'axe AB, les triangles mrM, MPT, donneront $mr : PM :: Mr$ ou $Pp : PT$; et les triangles nsN, NQF, donneront, $ns : NQ :: Ns$ ou $Qq : QF$. Donc $Pp : PT :: Qq : QF$, par conséquent $PT = QF$. Ce qui apprend que *dans la logarithmique les sous-tangentes sont toutes égales et constantes.*

515. Cela posé, faisons $MP = y$, $mr = dy$, $aP = x$, $Pp = dx$, $PT = m$, la proportion $mr : MP :: Pp : PT$ devient $dy : y :: dx : m$, d'où $dx = \frac{m\,dy}{y}$, équation différentielle de la logarithmique.

516. Puisque en faisant $ab = 1$, on a aP, ou $x = l(PM) = l(y)$ il suit que $dx = d(ly) = \frac{m\,dy}{y}$. Si la sous-tangente m ou $PT = ab = 1$, on aura $d(ly) = \frac{dy}{y}$; et comme la supposition $m = 1$ est la plus simple, on dit que $\frac{dy}{y}$ est *la différence du logarithme naturel de* y. D'où il suit *que la différence du logarithme naturel d'une quantité y vaut la différence de cette quantité divisée par la quantité même;* mais dans toute autre supposition *la différence du logarithme d'une quantité* y *vaudra le produit de la différence* $\frac{dy}{y}$ *du logarithme naturel, multipliée par la sous-tangente* m.

517. La quantité par laquelle il faudrait multiplier le logarithme naturel d'une quantité pour avoir son logarithme dans une autre logarithmique, est appelée *le module*. Il doit être constant pour tous les logarithmes d'un

même système ; car, par la nature de la logarithmique, si les ordonnées sont en proportion ou en progression géométrique, leurs abscisses, que nous prenons pour leurs logarithmes, doivent être en proportion ou en progression arithmétique. Il faudra donc que les abscisses de la logarithmique naturelle, soient multipliées par une même quantité pour devenir égales à celles des mêmes ordonnées dans une autre logarithmique.

518. Soit ly le logarithme naturel de y, p le module dans un autre système de logarithmes, nous aurons $p\,ly$ pour le logarithme de y dans le dernier système. Or, en différenciant, $d(p\,ly) = p \cdot d(ly) = \frac{p\,dy}{y}$. Donc *le module, dans un système de logarithmes, est égal à la sous-tangente de la logarithmique qui représente ce système.*

519. Pour avoir $d(l(a+x))$, je ferais $y = a + x$, ce qui donne $dy = dx$; substituant dans $d(ly) = \frac{dy}{y}$, on trouvera $d(l(a+x)) = \frac{dx}{a+x}$, lorsque la sous-tangente ou le module $= 1$; ou en substituant dans $d(ly) = \frac{m\,dy}{y}$, il vient $d(l(a+x)) = \frac{m\,dx}{a+x}$ pour le module m. Il sera donc aisé de différencier les expressions qui contiennent des logarithmes, il suffit pour cela que l'on puisse prendre y pour la quantité dont on a le logarithme. Or, en supposant ab positive, l'ordonnée y ne peut représenter que des quantités positives ; et s'il s'agissait de différencier le logarithme d'une quantité négative, on observera que les quantités négatives ne peuvent point être comparées aux quantités positives (*alg.* 208); et qu'ainsi elles ne sauraient avoir des logarithmes, relativement à l'unité positive ab. Mais si l'on prend $ab' = ab$, et qu'on prolonge dans le sens négatif les ordonnées PM, QN, etc., de manière que $PM' = PM$, $QN' = QN$, etc. la courbe $b'\,M'\,N'$, qui passera par tous les points b', M', N', etc. aura pour ses ordonnées des quantités négatives

PM′, QN′, etc. qui auront, avec l'unité négative ab', les mêmes raisons que les quantités positives PM, QN, etc. ont avec l'unité positive ab; et qu'ainsi aP étant supposée = logarithme de PM, on aura aussi aP = logarithme de PM′, etc. par conséquent *le logarithme d'une quantité négative est le même que celui de la même quantité positive.* Donc la différence du logarithme d'une quantité négative sera la même que celle du logarithme de la même quantité positive. Ainsi $dl(-y) = \frac{dy}{y}$. La règle pour avoir cette différence sera la même que pour $dl(y)$. Ainsi je prends la différence de $-y$, qui est $= -dy$, je la divise par la quantité $-y$, ce qui fait $\frac{-dy}{-y} = \frac{dy}{y}$. Si le module, au lieu d'être = 1, était = m, on aurait $dl(-y) = \frac{mdy}{y}$.

520. L'équation $d(ly) = \frac{dy}{y}$ donne $dy = y \cdot d(ly)$. Ce qui nous apprend que *la différence* (dy) *d'une quantité* (y) *vaut le produit de la quantité même* (y), *multipliée par la différence* d(ly) *de son logarithme naturel.* Par exemple, $d(x^n) = x^n \cdot d^n(x^n) = x^m \cdot d(mlx) = x^m \cdot \frac{mdx}{x}$ $= \frac{mx^m dx}{x} = mx^{m-1}dx$. Il en est de même des différences des autres quantités : on peut les trouver par cette nouvelle règle, à laquelle il faut nécessairement recourir lorsque les exposants sont variables. Ainsi $d(a^x) = ax \times d(la^x) = a^x \cdot d(xla) = a^x \cdot dxla$ (les quantités a^x, x^x, etc. s'appellent *quantités exponentielles*).

521. Pour faire quelque application des principes précédents, proposons-nous de déterminer la tangente d'une courbe quelconque dont on ait l'équation, en supposant les coordonnées perpendiculaires entre elles. Il est assez évident que les expressions différentielles de la tangente ou de la sous-tangente, de la normale ou de la sous-normale, sont également propres à résoudre ce problème. Or, pour

trouver ces expressions, soit M m (FIG. 150) l'incrément de l'arc SM ; son prolongement en ligne droite formera la tangente TM. Tirons les ordonnées MP, mp, perpendiculaires sur l'axe SN, la droite M r parallèle au même axe, et nommons PM $= y$, $mr = dy$, SP $= x$, Pp = Mr $= dx$, M$m = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$.

Cela posé, les triangles Mmr, MPT, donnent $mr\,(dy)$: M$r\,(dx)$ :: PM(y) : PT $= \frac{y\,dx}{dy}$, expression différentielle de la sous-tangente PT. On n'aura donc qu'à différencier l'équation de la courbe pour avoir la valeur de $\frac{dx}{dy}$, et la substituer, ce qui déterminera la valeur de la sous-tangente.

522. Par exemple, dans la parabole ordinaire $y^2 = px$; donc $2\,y\,dy = p\,dx$ ou $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$. Ainsi PT $= \frac{2y^2}{p}$ $\frac{2px}{p} = 2x$, comme on l'a déja trouvé (444)

523. Dans l'ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$: ainsi $2y\,dy$ $= \frac{b^2}{a^2}(2a\,dx - 2x\,dx)$; donc $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\frac{b^2}{a^2}(a-x)}$. Ainsi

$$\text{PT} = \frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a-x)} = \frac{\frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)}{\frac{b^2}{a^2}(a-x)} = \frac{2ax - x^2}{a-x}.$$ L'équation du cercle $y^2 = 2ax - x^2$ donne le même résultat.

524. Dans l'hyperbole $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$, ce qui donne, en calculant comme pour l'ellipse, ... PT $= \frac{2ax + x^2}{a + x}$.

525. Les mêmes triangles Mmr, MTP (FIG. 150),

donnent $mr\,(dy) : \mathrm{M}m\,(ds) :: \mathrm{PM}\,(y) : \mathrm{TM} = \frac{y\,ds}{dy} = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2\,dx^2}{dy^2}\right)}$. On pourra donc déterminer la tangente, en différenciant l'équation de la courbe.

Il en sera de même de la normale MN, et de la sous-normale PN, dont on aura les expressions différentielles par les triangles M*mr*, NMP, qui donnent $\mathrm{PN} = \frac{y\,dy}{dx}$, et $\mathrm{MN} = \frac{y\,ds}{dx} = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2\,dy^2}{dx^2}\right)}$.

526. Nous ferons encore usage du calcul différentiel pour déterminer le rayon de courbure en un point quelconque d'une courbe dont on ait l'équation.

Supposons (FIG. 150) que l'arc différentiel $\mathrm{M}m = ds$, puisse être décrit du centre C avec le rayon $\mathrm{CM} = \mathrm{C}m$ (la ligne CM est appelée *rayon osculateur* ou *rayon de courbure*): soient les ordonnées MP, *mp*, perpendiculaires sur l'axe SP, et la ligne M*r* parallèle à cet axe : du centre C et du rayon CN, décrivons l'arc N*q* ; faisons $\mathrm{MP} = y$, $mr = dy$, $\mathrm{SP} = x$, $\mathrm{P}p = \mathrm{M}r = dx$, et supposons dx constante. Nous aurons $\mathrm{N}n = d\,(\mathrm{SN}) = d\left(x + \frac{y\,dy}{dx}\right) = \frac{dx^2 + dy^2 + y\,d^2y}{dx} = \frac{ds^2 + y\,d^2y}{dx}$. Cela posé, on a $\mathrm{N}q : \mathrm{M}m :: \mathrm{CN} : \mathrm{CM}$, ou $\mathrm{M}m - \mathrm{N}q : \mathrm{M}m :: \mathrm{CM} - \mathrm{CN}$ ou $\mathrm{MN} : \mathrm{CM}$. Or, (525) $\mathrm{MN} = \frac{y\,ds}{dx}$, $\mathrm{M}m = ds$; d'ailleurs les triangles N*qn*, M*rm*, donnent $\mathrm{M}m\,(ds) : \mathrm{M}r\,(dx) :: \mathrm{N}n\left(\frac{ds^2 + y\,d^2y}{dx}\right) : \mathrm{N}q = \frac{ds^2 + y\,d^2y}{ds}$; ainsi $\mathrm{M}m - \mathrm{N}q = \frac{-y\,d^2y}{ds}$. Substituant dans la première proportion, il vient $\frac{-y\,d^2y}{ds} : ds :: \frac{y\,ds}{dx} : \mathrm{CM} = \frac{ds^3}{-dx\,d^2y} = \frac{(\sqrt{dx^2 + dy^2})^3}{-dx\,d^2y}$.

527. Pour appliquer cette formule aux sections coniques, observons que $MN = \frac{y\,ds}{dx}$; donc $ds^3 = \frac{dx^3}{y^3}(MN)^3$; substituant, on aura $CM = \frac{dx^2.(MN)^3}{-y^3\,d^2y}$.

Or, dans l'ellipse et l'hyperbole (508), on a $d^2y = \frac{-p^2\,dx^2}{4y^3}$, ainsi $CM = \frac{(MN)^3}{\frac{1}{4}p^2}$... D'ailleurs (410) $MN = \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{\pm a^4 \mp c^2x^2}{a^2}\right)}$, et en menant le diamètre $D\,d$ (FIG. 138) parallèle à MT, on a (425) $M\,q = q = \frac{ab}{\sqrt{\left(\frac{\pm a^4 \mp c^2x^2}{a^2}\right)}}$. Ainsi (FIG. 139) $MN \times q = b^2$, ou $MN = \frac{b^2}{q}$; donc $(MN)^2 = \frac{b^4}{q^2} = \frac{\frac{1}{4}a^2p^2}{q^2}$ (383 et 400); par conséquent $(MN)^3 = \frac{\frac{1}{4}a^2b^2p^2}{q^3}$; ce qui donne $CM = \frac{a^2b^2}{q^3}$... Si l'on mène du foyer f (FIG. 138) le rayon vecteur $fM = R$, la droite $fS = T$ perpendiculaire sur la tangente MS, on aura $MX = a$ (415); ainsi les triangles $MX\,q$, fMS donneront $fM(R) : fS(T) :: MX\,(a) : M\,q = q = \frac{aT}{R}$; substituant, il vient $CM = \frac{b^2R^3}{aT^3} = \frac{\frac{1}{2}pR^3}{T^3}$. Si on fait $FM = r$, $FS = t$, on aura $CM = \frac{\frac{1}{2}pr^3}{t^3}$.

528. Puisque (508) l'équation $y^2 = px$ donne $d^2y = \frac{-p^2\,dx^2}{4y^3}$, il suit qu'on a de même dans la parabole $CM = \frac{(MN)^3}{\frac{1}{4}p^2}$... Soit $FM = FT = r$ (FIG. 142); soit la perpendiculaire FS tirée du foyer sur la tangente $= t$; nous aurons la normale $MN = 2t$, ainsi $(MN)^2 = 4t^2$. Or, si l'on mène SA, elle sera (442) parallèle à MP; ainsi (124) $(FS)^2$ ou $t^2 = FA \times FT = \frac{1}{4}pr$ (434). Donc $(MN)^2 = pr$, et $(MN)^3$

$= 2prt$. Par conséquent $CM = \frac{2prt}{\frac{1}{4}p^2} = \frac{2rt}{\frac{1}{4}p}$. Or, $\frac{1}{4}p = \frac{t^2}{r}$; donc $CM = \frac{2r^2}{t}$ .... Si l'on multiplie cette valeur par $\frac{1}{4}p$, et qu'on la divise ensuite par son égale $\frac{t^2}{r}$, ce qui ne peut la changer, on aura, comme ci-devant, $CM = \frac{\frac{1}{2}pr^3}{t^3}$.

529. Pour trouver le rayon de courbure dans la cycloïde ordinaire ou simple, prenons l'arc différentiel Mm (FIG. 144), menons les ordonnées MP, mp, perpendiculaires, et Mr parallèle à l'axe SD; dans le cercle générateur SODF, tirons les cordes OS, OD; et faisons $SP = x$, $MP = y$, $DS = 2a$, nous aurons $Pp = Mr = dx$, $mr = dy$. Cela posé :

Puisque (455) SO est parallèle à la tangente TM, les triangles Mmr, SOP, donneront $mr : Mr :: OP : SP$, ou $dy : dx :: \sqrt{2ax - x^2} : x$, d'où $dy = \frac{dx}{x}\sqrt{2ax - x^2}$; ainsi (509) $d^2y = \frac{-adx^2}{x\sqrt{(2ax - xx)}}$; et $dy^2 = \left(\frac{dx}{x}\sqrt{2ax - x^2}\right)^2 = \frac{2adx^2}{x} - dx^2$, ou bien $dx^2 + dy^2 = \frac{2adx^2}{x}$, ou encore $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{\left(\frac{2a}{x}\right)}$. Substituant ces valeurs dans la formule générale $CM = \frac{(\sqrt{(dx^2 + dy^2)})^3}{-dxd^2y}$, on aura, réduction faite, $CM = 2\sqrt{2a(2a - x)} = 2\sqrt{DS \times DP}$. Or, (124) $DS \times DP = \overline{DO}^2$. Donc $CM = 2 \times DO = 2 \times MK$ (88); ce qui fait voir que *la base* AB *de la cycloïde divise le rayon osculateur* CM *en deux parties égales* CK, KM.

CHAPITRE III.

Contenant quelques notions de calcul intégral.

530. Le calcul intégral n'est autre chose que la méthode inverse du calcul différentiel, et son objet est par conséquent la solution de ce problème : *connaissant les dernières raisons entre les différences de deux quantités, trouver les raisons mêmes qui existent entre ces quantités.* Le nom de calcul intégral a été donné à cette méthode, parce que dans les principes de Leibnitz son objet est de sommer ou de rendre entières des quantités dont on ne connaît que des parties infiniment petites. C'est pourquoi on désigne toujours une intégration à faire par la lettre $\int$, qu'on met devant une expression différentielle ; ainsi $\int a\,dx$ veut dire *intégrale* de $a\,dx$, ou *somme* $a\,dx$, ou enfin *somme de* $a\,dx$; ces trois manières de s'énoncer sont également usitées.

531. Corollaire. Il suit de là *que les règles du calcul intégral seront les inverses de celles du calcul différentiel;* et qu'ainsi les résultats seront exacts, si, en les différenciant, leurs différences sont égales à celles que l'on s'était proposé d'intégrer.

532. D'après ces notions on croirait qu'il ne doit y avoir aucune difficulté à intégrer une différence quelconque. Cela serait en effet, s'il ne se présentait que des différentielles *complètes*, c'est-à-dire, *conformes aux résultats du calcul différentiel.* Mais souvent la solution d'un problème dépend de l'intégration d'une différentielle qui n'a pas cette condition, soit réellement, soit en apparence. Alors on est obligé d'avoir de nouvelles règles pour la ramener à cette forme, lorsqu'on le peut ; ou bien on la réduit en

séries dont on puisse intégrer tous les termes séparément. Si ensuite on peut sommer la série, on a l'intégrale exacte; autrement on se livre aux approximations.

Avant d'aller plus loin, nous observerons qu'une même différence peut avoir des intégrales différentes, à raison des constantes qui (499) ne sauraient faire partie des différences. Le calcul intégral appliqué à la solution de quelque problème, doit choisir celle qui en remplit les conditions; il doit par conséquent faire déterminer la constante nécessaire que nous représenterons généralement par C, et que nous ajouterons à l'intégrale variable, trouvée par la règle suivante. Cette règle ne s'applique qu'aux différentielles monomes, dans lesquelles il n'y a qu'une même variable avec sa différence.

533. RÈGLE. *Augmentez d'une unité l'exposant de la variable, divisez ensuite par l'exposant ainsi augmenté et par la différence de la variable*, le résultat sera l'intégrale de la différentielle monome proposée. Cette règle est visiblement l'inverse de celle qui a été prescrite (498) pour différencier les puissances d'une variable. Ainsi $\int m x^{m-1} dx = \frac{m x^m dx}{m dx} = x^m + C \ldots \int x^m dx = \frac{x^{m+1} dx}{(m+1) dx} = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$

Soit $m = 0$, il viendra $\int x^0 \, dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C.$

534. Si l'on suppose que x représente une quantité complexe, dx en sera la différence. D'où il suit que cette règle s'étend aux quantités complexes affectées d'un exposant quelconque m, pourvu qu'on ait hors de cet exposant la différence de la racine. Par exemple $\int 2 z dz (a^2 + z^2)^n = \frac{(a^2+z^2)^{m+1}}{m+1} + C.$ Il n'est pas même nécessaire d'avoir le facteur constant qui peut entrer dans la différence de la racine. Ainsi $\int z^2 dz (a^3 b + z^3)^m = \frac{(a^3 b + z^3)^{m+1}}{3(m+1)} + C.$

Donc

Donc, en général, $\int x^{m-1} dx (a + b x^m)^p = \ldots\ldots$
$= \frac{(a+bx^m)^{p+1}}{mb(p+1)} + C.$

Cette règle nous suffit pour les usages que nous ferons du calcul intégral. On pourrait en avoir d'autres, en observant ce qui arrive dans la différenciation. Par exemple, de ce que $d(xy) = x dy + y dx$, on conclurait que $\int (x dy + y dx)$ se trouvera, en intégrant $x dy$, comme si x était constante, ce qui donne $\int (x dy + y dx) = xy + C$. Le grand détail qu'il faut pour l'intégration des différences à plusieurs variables, nous empêche d'aller plus loin. C'est pourquoi nous supposerons qu'on n'ait qu'une seule variable; alors on intégrera chaque terme par la règle précédente.

535. Il faut pourtant en excepter les termes où l'exposant de la variable est $= -1$. Car $x^{-1} dx = \frac{dx}{x} = d(lx)$; par conséquent $\int x^{-1} dx = lx + C$: au lieu que par la règle précédente, on aurait $\int x^{-1} dx = \frac{x^0}{0} = \frac{1}{0}$, quantité absurde.

536. Corollaire. Il suit de là que $\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x)$: d'ailleurs, faisant ici la division indiquée, on trouve que $\frac{dx}{a+x} = \frac{dx}{a} - \frac{x dx}{a^2} + \frac{x^2 dx}{a^3} - \frac{x^3 dx}{a^4} +$, etc. Ainsi $\int \frac{dx}{a+x}$ ou $l(a+x) = C + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} +$, etc. Or, C est une constante; elle ne peut donc pas changer, quelque valeur qu'on suppose à x. Faisons $x = 0$, et nous aurons $l(a) = C$. Substituant, on aura $l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} +$, etc. De même $\int \frac{-dx}{a-x} = l(a-x)$; d'où l'on déduit, en faisant le calcul comme nous l'avons fait pour $l(a+x)$, que $l(a-x) = la$

$-\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}-$, etc. Par conséquent $l(a+x)-l(a-x)$ ou (*alg.* 288) $l\frac{a+x}{a-x}=\frac{2x}{a}+\frac{2x^3}{3a^3}+\frac{2x^5}{5a^5}+$, etc.

537. Pour faire quelque usage de cette formule dans le calcul des logarithmes, supposons $\frac{x}{a}=\frac{1}{2z-1}$; ce qui donne $x=\frac{a}{2z-1}$; par conséquent $a+x=\frac{2az}{2z-1}$, et $a-x=\frac{2az-2a}{2z-1}$. Nous aurons $\frac{a+x}{a-x}=\frac{2az}{2az-2a}=\frac{z}{z-1}$. Substituant ces valeurs, il viendra $l\frac{z}{z-1}$ ou $lz-l(z-1)$, ou en transposant $lz=l(z-1)+\frac{2}{2z-1}+\frac{2}{3(2z-1)^3}+\frac{2}{5(2z-1)^5}+$, etc. série fort convergente lorsque z est un nombre un peu grand. Elle servira à calculer les logarithmes naturels ; car si $z=2$, $l(z-1)=l(1)=0$ (*alg.* 286). Donc en substituant, on aura $l(2)=0+\frac{2}{3}+\frac{2}{3.3^3}+\frac{2}{5.3^5}+\frac{2}{7.3^7}+$, etc. Calculant les huit premières fractions jusqu'à neuf décimales pour n'en conserver que sept, on trouvera $l(2)=0,6931472$. Si l'on fait ensuite $z=3$, on aura $l(z-1)=l(2)$; ainsi on trouvera $l(3)$. De même $l(4)=l(2^2)=2l(2)=1,3862944$; donc en faisant $z=5$, ce qui donne $l(z-1)=l(4)$, on pourra trouver $l(5)=1,6094379$, en calculant seulement les quatre premières fractions pour en ajouter la somme avec la valeur de $l(4)$. Il en est de même des logarithmes des autres nombres premiers, qui donneront ceux des nombres composés. Ainsi, par exemple, $l(10)=l(2)+l(5)=2,3025851$.

Dès qu'on aura calculé les logarithmes naturels, en les multipliant (*alg.* 301) par le module m qui convient aux

tables ordinaires, on aura ceux de ces tables ; ainsi puisque le logarithme tabulaire de 10 est = 1, on aura $m\ (2,3025851) = 1$; par conséquent $m = \frac{1}{2,3025851}$ $= 0,43429448$, ou bien $m = 0,4342945$.

Nous n'entrerons pas dans un plus grand détail sur les règles du calcul intégral ; il nous suffira de faire quelques applications de la règle précédente pour la quadrature des sections coniques.

538. Soit SM (FIG. 150) un arc de courbe quelconque : Mm sa différence : MP, mp, deux ordonnées perpendiculaires à l'axe SN. Il est évident que MmpP est la différentielle de l'espace SMP. Or, (168) MmpP $= \frac{-PM+mp}{2} \times Pp$, ou à cause de $pm = PM + mr = PM$ (482), MmpP $= \frac{2PM}{2} \times Pp = PM \times Pp$. Donc en faisant PM $= y$, P$p = dx$, on aura cette différence $= y\,dx$. On substituera donc la valeur de y en x prise dans l'équation de la courbe ; alors l'expression ne contiendra plus qu'une variable x : on intégrera, si on le peut, ou bien on réduira en série la valeur de y, pour n'avoir, après la substitution, qu'une suite de différences monomes à intégrer.

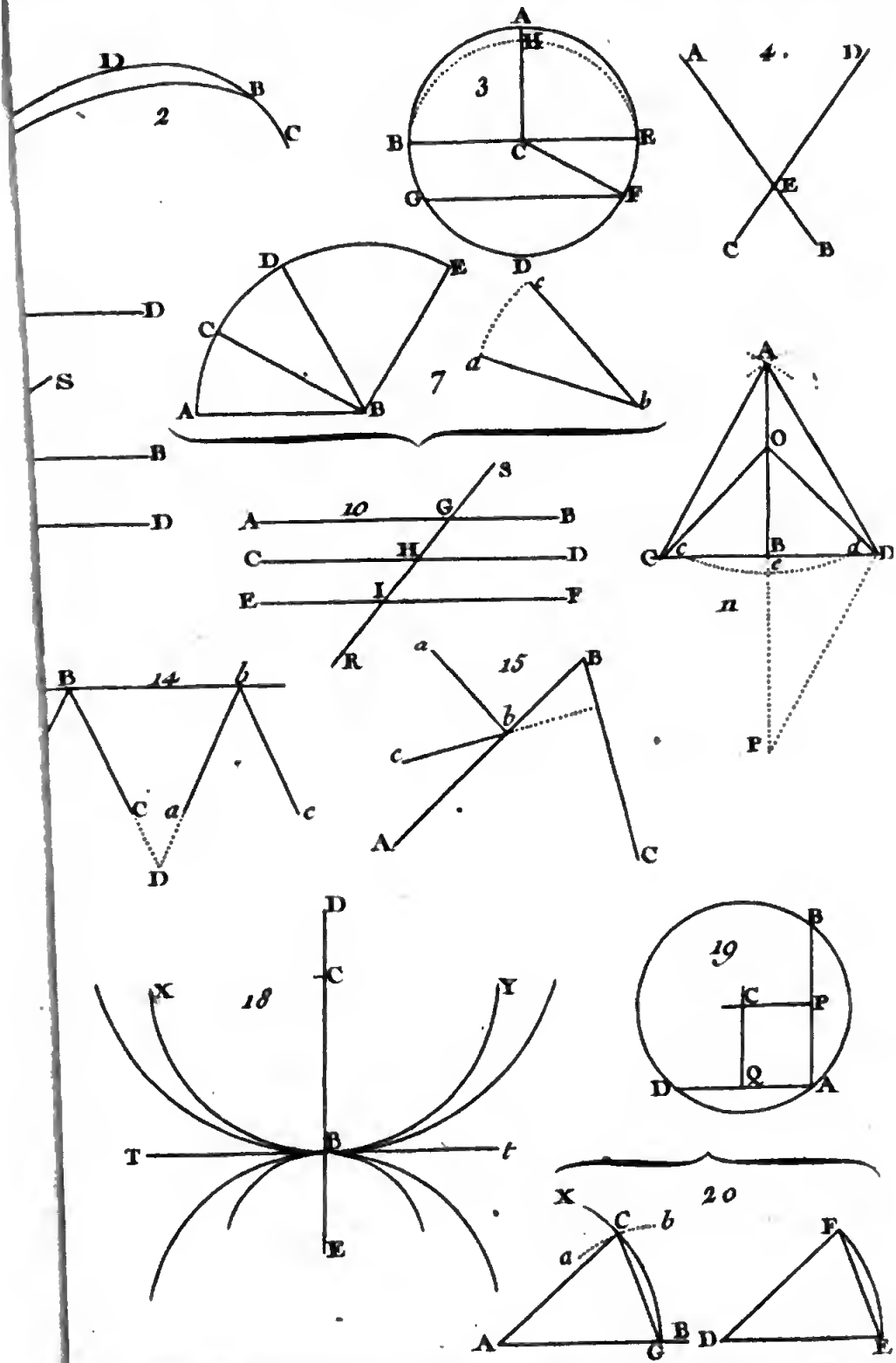
539. EXEMPLE I. Dans la parabole $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$. Donc $y\,dx = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}\,dx$. Par conséquent $\int y\,dx$ ou SMP $= \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{px^3} = \frac{2}{3} x\sqrt{px} = \frac{2}{3} xy$ = les $\frac{2}{3}$ *du rectangle des coordonnées*. On voit qu'il n'y a point là de constante, parce qu'en faisant $x = 0$, le tout devient 0 ; et cette courbe est la seule des sections coniques dont on ait pu trouver jusqu'ici la quadrature.

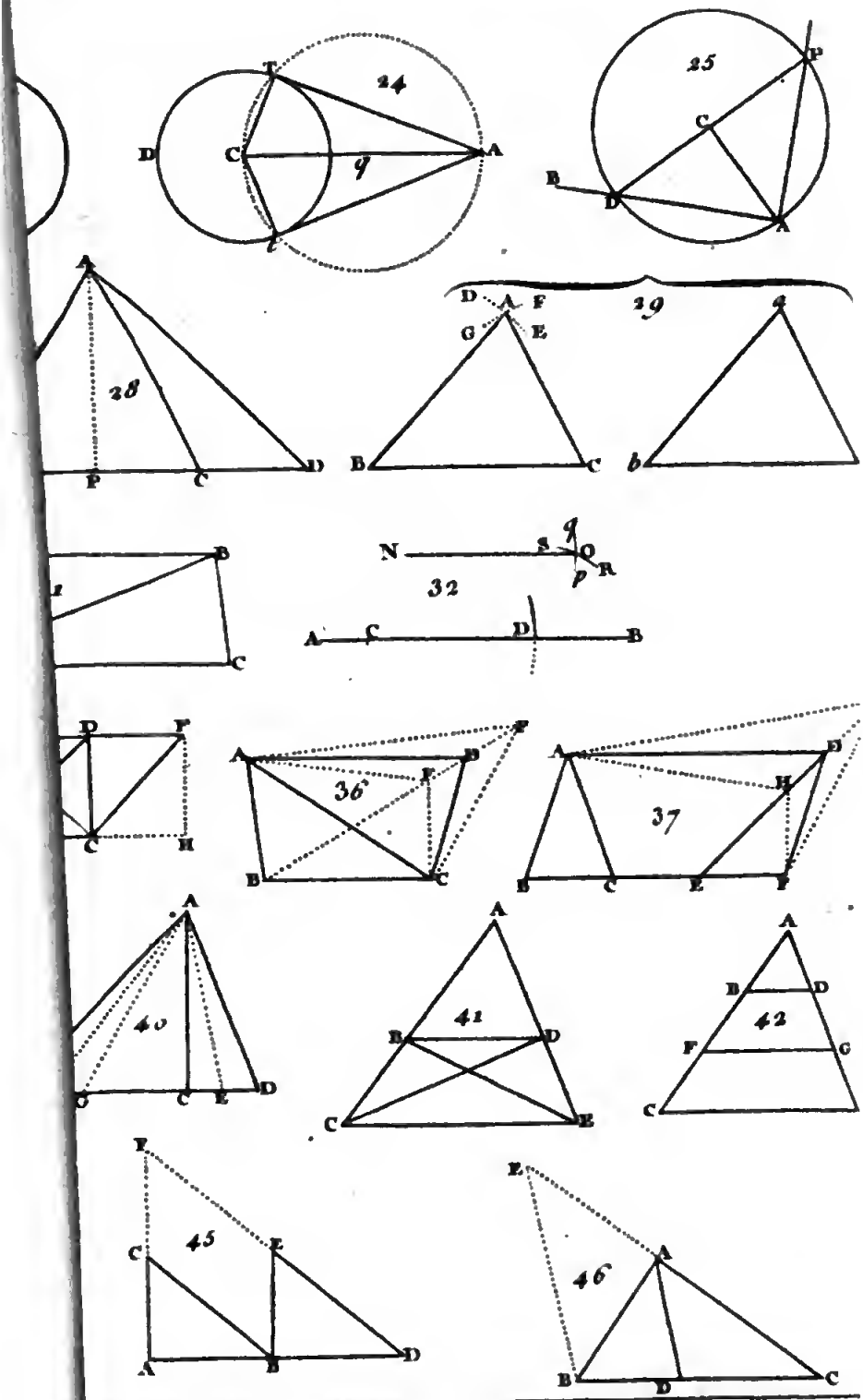
540. EXEMPLE II. Dans l'ellipse (FIG. 135) faisant C$p = x$, P$p = dx$, il est clair que PM $mp = y\,dx$ est l'incrément

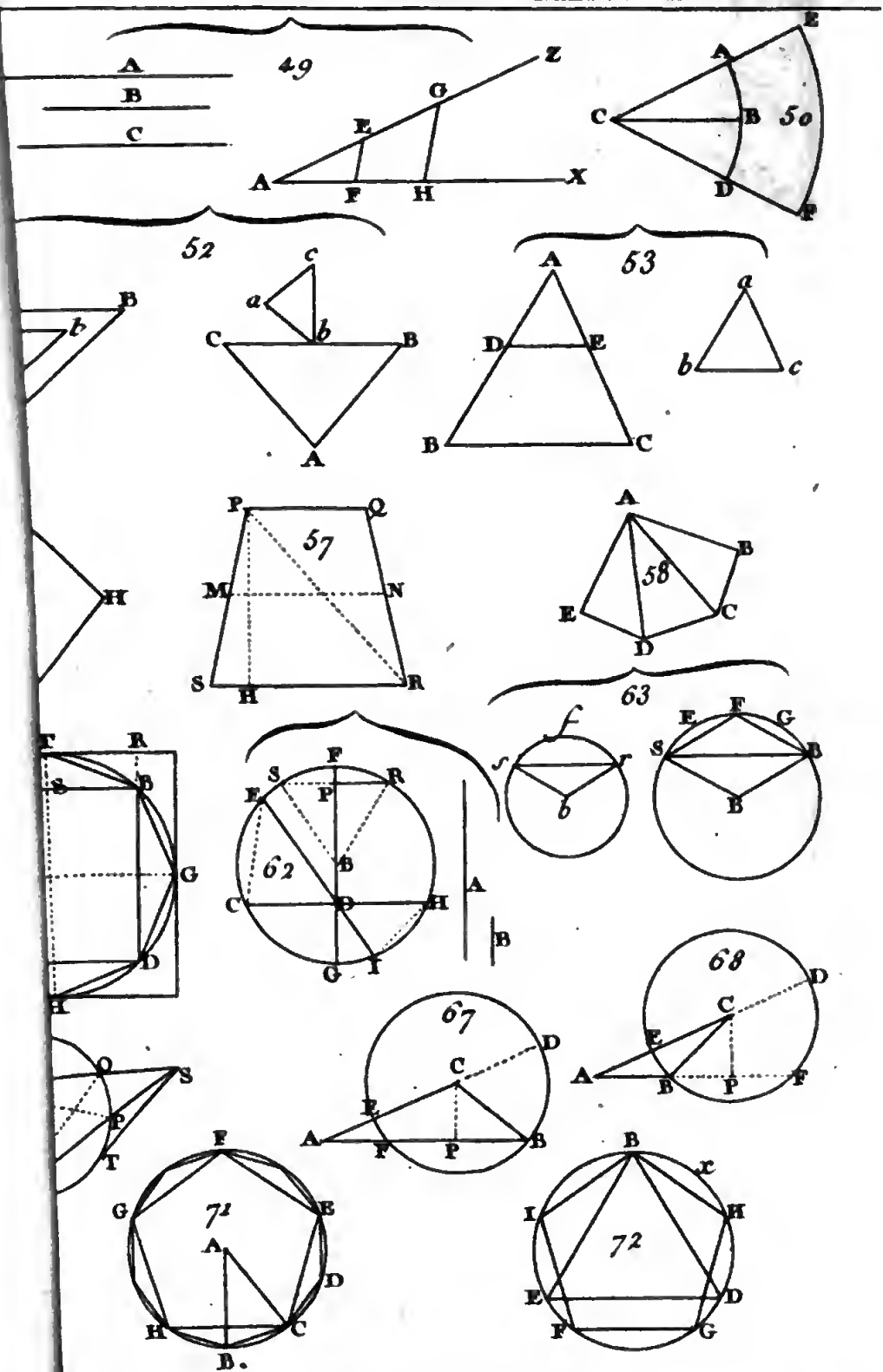
de l'espace C B mp correspondant à l'incrément dx de l'abscisse C p ; or, alors (*alg.* 173) $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ $= \frac{b}{a}\left(a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \text{etc.}\right)$. Substituant et intégrant on a $\int y\,dx$, ou $\text{CBMP} = \frac{b}{a}\int\left(a\,dx - \frac{x^2\,dx}{2a}\right.$ $\left. - \frac{x^4\,dx}{8a^3} - \text{etc.}\right) = \frac{b}{a}\left(ax - \frac{x^3}{3.2a} - \frac{x^5}{5.8a^3} - \text{etc.}\right) + \text{C}$. Or, si on fait $x = 0$, les deux membres se réduisent à $0 = 0 + \text{C} = \text{C}$. Si on fait $x = a$, on aura $\text{CBA} = \frac{b}{a}$ $\left(a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{.40} - \text{etc.}\right)$. Enfin si $b = a$, CBA devient un quart de cercle dont le rayon $= a$, et dont la surface $= a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{40} - \text{etc.}$

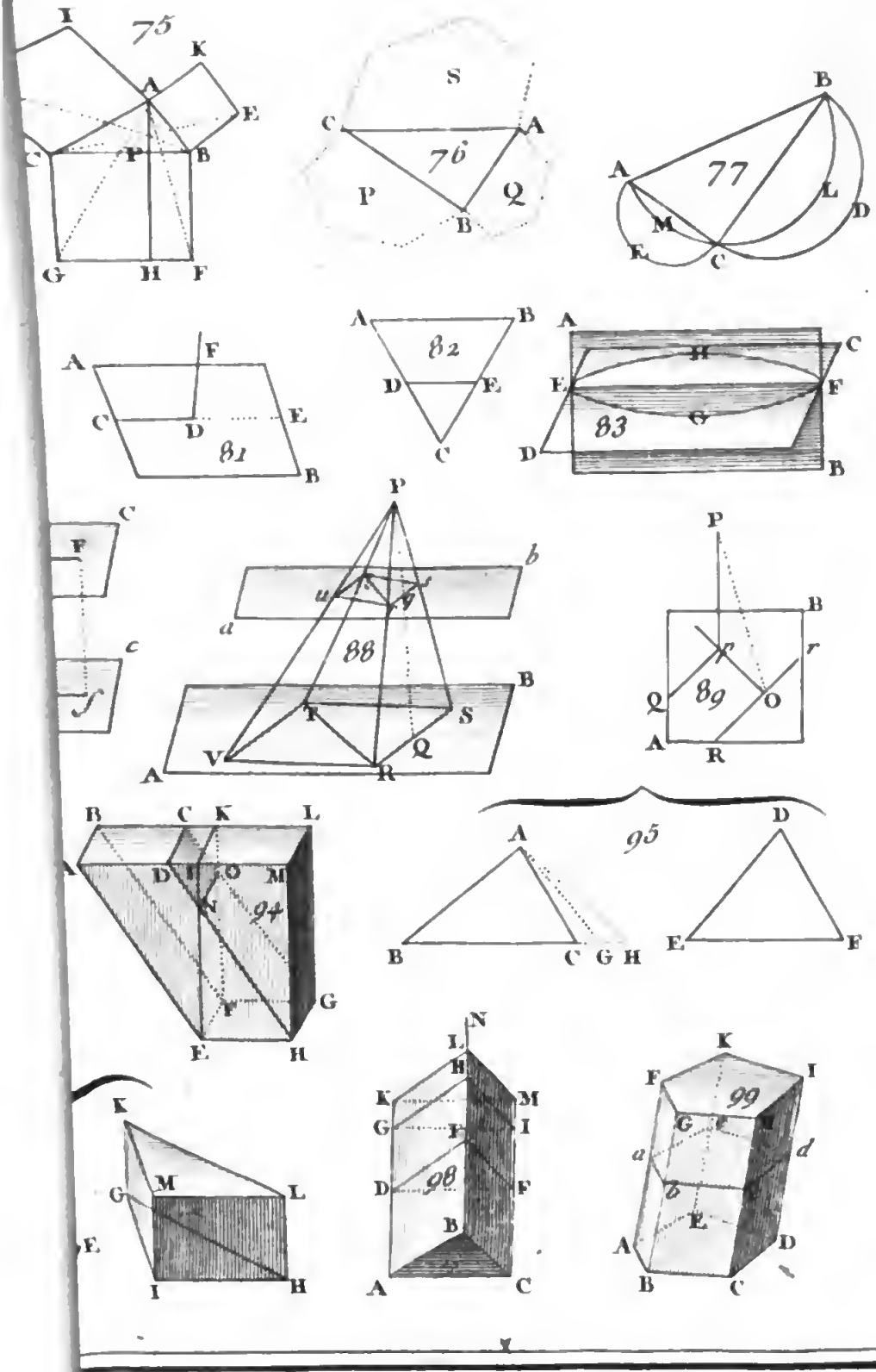
541. EXEMPLE III. Dans l'hyperbole $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (l'origine des abscisses étant au centre). Substituant, il vient (FIG. 137) $\int y\,dx$ ou $\text{A}pm = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{x^2 - a^2}$ $= \frac{b}{a}\int\left(x\,dx - \frac{a^2\,dx}{2x} - \frac{a^4\,dx}{8x^3} - \text{etc.}\right) = \frac{b}{a}\int\left(x\,dx - \right.$ $\left. - \frac{a^2}{2}x^{-1}\,dx - \frac{a^4}{8}x^{-3}\,dx - \text{etc.}\right)$. Or, $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$: $\int\left(-\frac{a^2}{2}x^{-1}\,dx\right) = -\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{x} = -\frac{a^2}{2}l.\,x$ (516) : $\int\left(-\frac{a^4}{8}x^{-3}\,dx\right) = \frac{a^4}{8.2}x^{-2} = \frac{a^4}{16x^2}$; donc $\text{A}pm = \frac{b}{a}$ $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2\,lx + \frac{a^4}{16x^2} + \text{etc.}\right)$, sans constante.

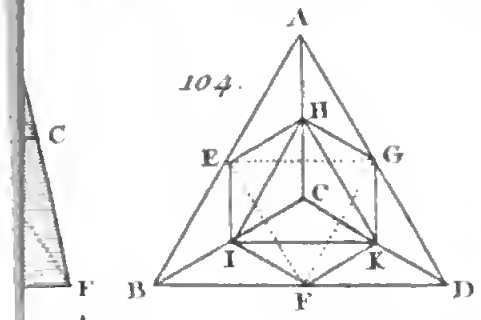
FIN.

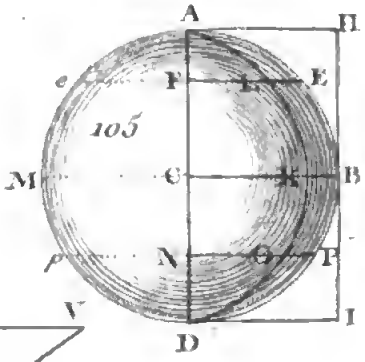

D
B
C
2
A
H
3
B
C
E
G
F
D
A
4.
D
E
C
B
D
S
B
D
D
E
C
A
B
7
c
a
b
A
O
C
c
B
a
D
c
n
P
S
A
10
G
B
C
H
D
E
I
F
R
B
14
b
C
a
c
D
a
15
B
b
c
A
C
D
C
X
18
Y
T
B
t
E
B
19
C
P
Q
D
A
X
20
C
b
a
A
B
G
F
D
E

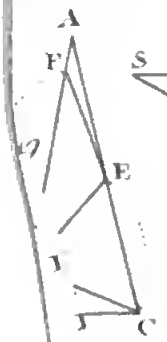

24
T
D
C
A
q
t
25
P
C
B
D
A
28
A
P
C
D
29
D
A
F
G
E
B
C
q
b
B
L
C
N
S
q
O
R
p
32
A
C
D
B
D
F
C
H
36
A
B
F
B
C
37
A
D
H
B
C
E
F
40
A
C
C
E
D
41
A
B
D
C
E
42
A
B
D
F
G
C
F
C
45
E
A
B
D
E
46
A
B
D
C

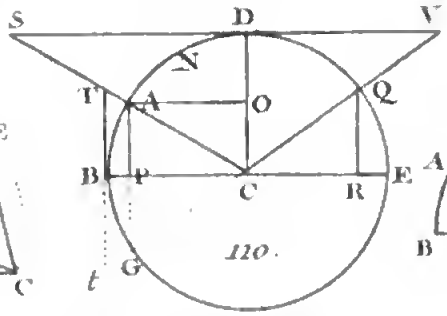

A
B
C
49
Z
G
E
A
F
H
X
E
A
C
B
50
D
F
52
c
a
b
B
b
C
B
A
53
A
D
E
a
b
c
B
C
H
P
Q
57
M
N
S
H
R
A
B
58
E
C
D
63
f
s
r
b
E
F
G
S
B
B
T
R
S
B
G
D
H
62
S
F
R
P
B
C
D
H
G
I
A
B
68
D
C
E
A
B
P
F
67
D
C
E
A
F
P
B
Q
S
P
T
F
G
E
71
A
D
H
C
B.
B
x
I
H
72
E
D
F
G

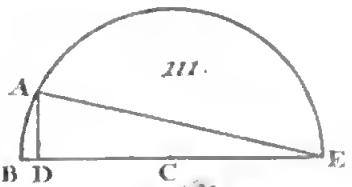

75
I
K
A
E
C
P
B
G
H
F
S
C
A
76
P
Q
B
B
A
77
L
M
D
E
C
A
F
C
D
E
81
B
A
B
82
D
E
C
A
H
C
E
F
83
G
D
B
P
C
F
f
c
a
u
b
88
B
T
S
V
Q
R
P
B
r
r
Q
89
O
A
R
B
C
K
L
A
D
I
O
M
N
94
G
F
E
H
A
95
D
B
C
G
H
E
F
K
G
M
L
E
I
H
N
I
H
K
M
G
I
D
98
F
B
A
C
K
F
I
99
G
a
d
b
E
A
D
B
C

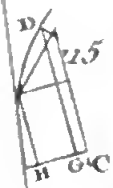

104.
A
H
E
G
C
I
K
B
F
D

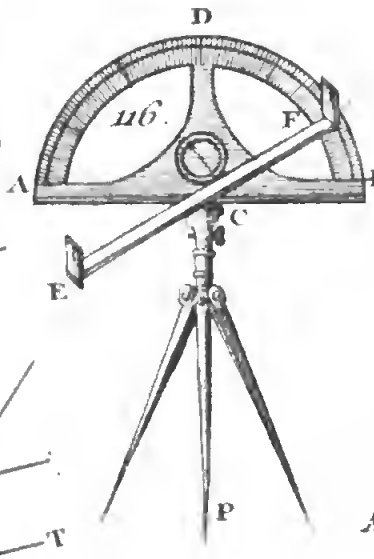

105
A
H
e
F
E
M
C
B
N
P
D
I


A
F
E
I
C


S
D
V
N
T
A
O
Q
B
P
C
R
E
110.
t
G

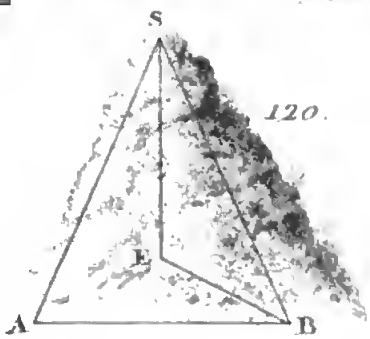

111.
A
B D
C
E


D
115
H
G
C


D
116.
F
A
B
C
E
P

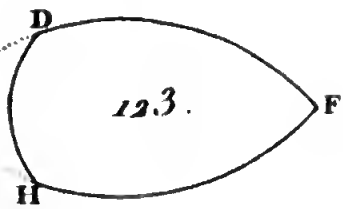
M

N

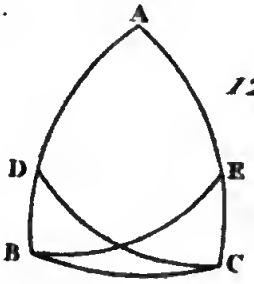

S
120.
E
A
B

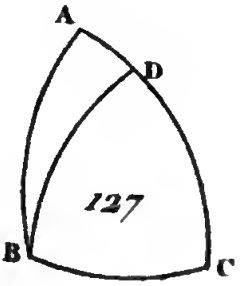
C

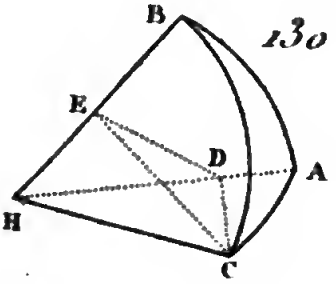
T
t
I
D
H

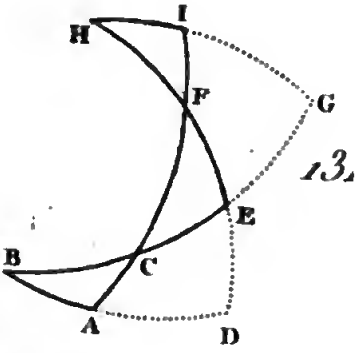

D
123.
F
H

5.


A
D
E
B
C
126.

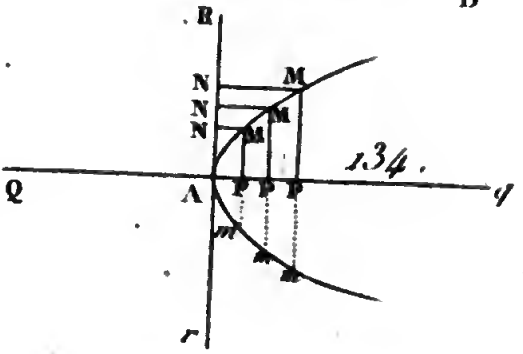

A
D
127
B
C


B
130
E
D
A
H
C

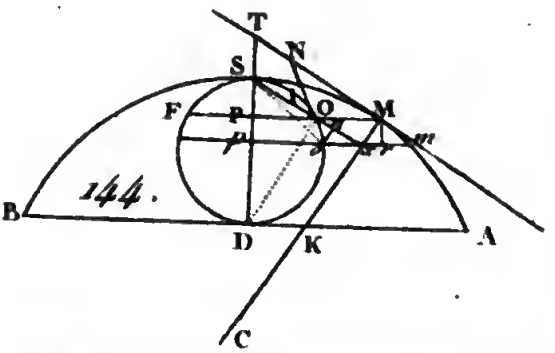

H
I
F
G
13
E
B
C
A
D

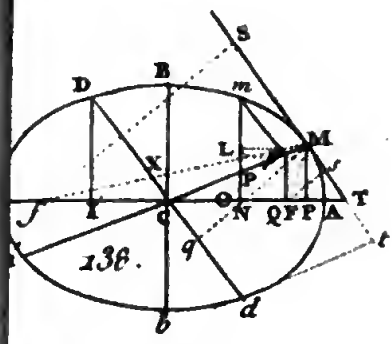
33.

M
q

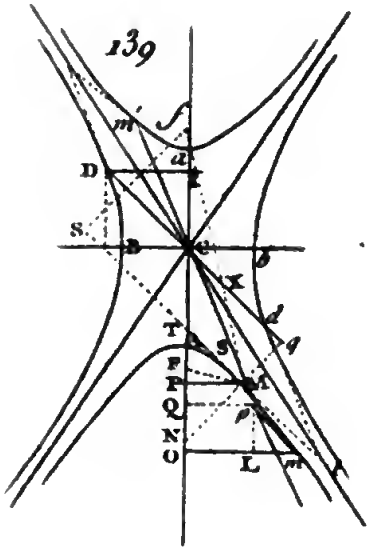

R
N
M
N
M
N
M
134.
Q
A
P
P
P
q
m
m
m
r

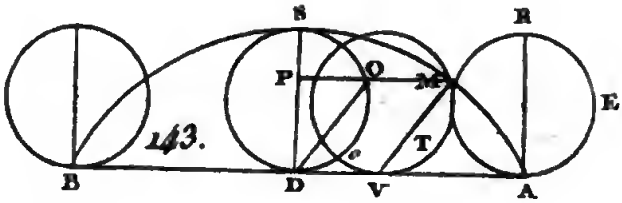
r
B
u
s
r
q
n
t


T
N
S
F
P
O
M
m
144.
B
D
K
A
C

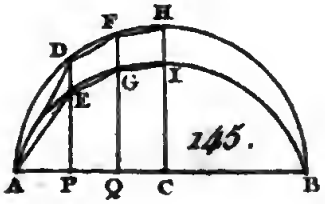


138.

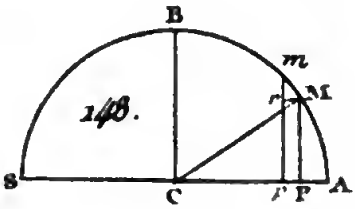




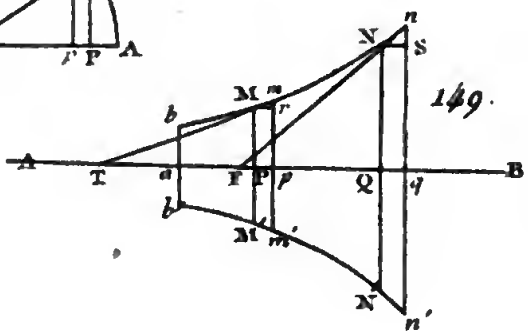
143.



145.



148.



149.

TABLE.

PREMIÈRE PARTIE.

DE L'ARITHMÉTIQUE.

SECTION PREMIERE.

Des principes de la numération et des différentes méthodes de composition et de résolution sur les nombres entiers.

CHAP. I. DÉFINITIONS *et notions préliminaires.* pag. 1
CHAP. II. *De l'addition.* 4
CHAP. III. *De la soustraction.* 7
CHAP. IV. *De la multiplication simple.* 12
CHAP. V. *De la division.* 17
PREMIER CAS. *Diviseur à un seul caractère.* 18
SECOND CAS. *Diviseur à plusieurs caractères.* 20

SECTION II.

Du calcul des fractions.

CHAP. I. *De la nature et des principales propriétés des fractions.* 26
CHAP. II. *Des quatre opérations de l'arithmétique sur les fractions.* 30
CHAP. III. *De l'origine et des propriétés des fractions décimales.* 31

CHAP. IV. *Des opérations de l'arithmétique sur les fractions décimales.* pag. 33
CHAP. V. *Des opérations de l'arithmétique sur les nombres complexes.* 37

SECTION III.

Des nombres abstraits considérés par rapport à leurs facteurs.

CHAP. I. *Des nombres simples et des nombres composés.* 42
CHAP. II. *Des puissances et de leurs principales propriétés.* 46
CHAP. III. *Des racines et des nombres irrationels et imaginaires qui en résultent.* 49

SECONDE PARTIE.

ALGÈBRE.

SECTION PREMIERE.

Des notions générales et des principales opérations de l'algèbre.

CHAP. I. DÉFINITIONS, *notions préliminaires et principes de convention.* 53
CHAP. II. *De la réduction, de l'addition et de la soustraction des quantités algébriques.* 56
CHAP. III. *De la multiplication.* 58
CHAP. IV. *De la division.* 61
CHAP. V. *Où l'on enseigne à trouver tous les diviseurs exacts d'une quantité algébrique, et où l'on démontre la méthode déjà donnée pour déterminer la plus grande mesure commune de deux nombres.* 66

SECTION II.

Des puissances et des racines.

CHAP. I. *De la formation des puissances et de leurs principales propriétés.* pag. 69
CHAP. II. *Des différentes puissances du binome* a ± b. 72
CHAP. III. *De l'extraction des racines.* 80
CHAP. IV. *De l'extraction des racines des nombres.* 87
CHAP. V. *Où l'on expose différentes méthodes d'approximation.* 94
CHAP. VI. *Du calcul des radicaux.* 97
CHAP. VII. *De quelques propriétés des imaginaires et de leur réduction à la forme* m ± n √ — 1. 103

SECTION III.

Des raisons, proportions, progressions et logarithmes.

CHAP. I. *Propriétés générales des raisons.* 108
CHAP. II. *Qui contient les méthodes de composition et de résolution des raisons, avec la manière de les mesurer.* 113
Addition des raisons. ibid.
Soustraction des raisons. 114
Multiplication et division des raisons. 115
CHAP. III. *Des proportions.* 117
CHAP. IV. *De la règle de trois et de ses différentes applications.* 122
CHAP. V. *Des progressions géométriques.* 125
CHAP. VI. *Des raisons, proportions et progressions arithmétiques.* 131
CHAP. VII. *De la sommation des différentes puissances des termes d'une progression arithmétique.* 136
CHAP. VIII. *De l'origine et des principales propriétés des logarithmes.* 138

CHAP. IX. *Des différents systèmes de logarithmes, de l'origine des tables, et de la manière de s'en servir.* pag. 142

CHAP. X. *Des permutations, des combinaisons et de leurs différents usages.* 147

SECTION IV.

De l'analyse.

CHAP. I. *Des propriétés générales des équations.* 156

CHAP. II. *Des équations du premier degré à une seule inconnue.* 160

CHAP. III. *Des équations du premier degré à plusieurs inconnues.* 165

CHAP. IV. *De quelques propriétés générales des équations composées.* 175

CHAP. V. *Des équations pures de tous les degrés, et de celles du second en particulier.* 185

CHAP. VI. *Des équations du troisième degré.* 195

CHAP. VII. *De la résolution des équations du quatrième degré.* 208

TROISIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE.

SECTION PREMIERE.

Des propriétés des lignes droites et du cercle.

CHAP. I. DÉFINITIONS *et notions préliminaires.* 215

CHAP. II. *Des propriétés qui résultent de la comparaison de deux lignes droites.* 219

CHAP. III. *Des parallèles, des perpendiculaires et des obliques.* 223

CHAP. IV. *De quelques propriétés des lignes droites, considérées dans le cercle.* pag. 229

CHAP. V. *De la mesure des angles considérés dans le cercle.* 234

CHAP. VI. *Des différentes espèces de polygones en général et du triangle en particulier.* 236

CHAP. VII. *Qui traite de l'égalité et de quelques autres rapports, tant des triangles que des parallélogrammes.* 240

CHAP. VIII. *Des lignes proportionnelles.* 246

CHAP. IX. *De quelques notions générales sur la similitude des figures, et de leur application aux triangles.* 251

CHAP. X. *De quelques propriétés générales des polygones.* 255

CHAP. XI. *Dans lequel on expose quelques propriétés du cercle et des lignes droites qui s'y rapportent.* 261

SECTION II.

Des surfaces.

CHAP. I. *Des rapports et de la mesure des surfaces planes.* 268

CHAP. II. *Des surfaces planes, considérées par rapport à leurs positions respectives.* 277

SECTION III.

Des solides.

CHAP. I. *Notions générales sur les solides et propriétés particulières du prisme.* 284

CHAP. II. *De la pyramide.* 294

CHAP. III. *De la sphère.* 302

SECTION IV.

De la trigonométrie plane.

CHAP. I. *Notions générales et propriétés des sinus, tangentes et sécantes.* pag. 307
CHAP. II. *De la résolution de toute sorte de triangles rectilignes.* 316

SECTION V.

De la trigonométrie sphérique.

CHAP. I. *Principes de trigonométrie sphérique et propriétés générales des triangles.* 323
CHAP. II. *Des triangles sphériques rectangles.* 330

Notions élémentaires sur les sections coniques, et sur la cycloïde.

CHAP. I. *De la théorie des lignes courbes en général.* 343
CHAP. II. *De l'ellipse.* 351
CHAP. III. *De l'hyperbole.* 357
CHAP. IV. *De la parabole.* 373
CHAP. V. *De la cycloïde.* 377

Principes de calcul différentiel et intégral.

CHAP. I. *Introduction à ce calcul.* 381
CHAP. II. *Contenant les principes du calcul différentiel.* 398
CHAP. III. *Contenant quelques notions de calcul intégral.* 415

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

Page 67, avant-dernière ligne, $c - c + e$, *lisez* $c - e + e$.

Page 95, *ligne* 23, racine quarrée de 16, *lisez* racine quarrée de 15.

Page 163, dernière ligne, $dx + cy$, *lisez* $d + ey$.

Page 169, case A, $z = d - bz$, *lisez* $x = d - bz$.

Page 249, *ligne* 8, FIG. 45, *lisez* FIG. 46.

Page 258, *ligne* 5, après ces mots *symétrique et régulier, ajoutez* (FIG 60.)

Page 306, *ligne* 25, $v = \frac{1}{6} a \times s$, *lisez* $v = \frac{1}{3} a \times S$.

EXTRAIT du Catalogue des livres de FIRMIN DIDOT, *libraire, rue de Thionville, n.° 116.*

COURS de mathématiques de Bezout, à l'usage de la marine, édition originale, 6 vol. in-8. dont les parties se vendent séparément ; prix br. 19 fr.

Supplément à la trigonométrie sphérique et à la navigation de Bezout, etc. ; par F. Callet, in-4. br. 3 fr. 50 c.

Cours de mathématiques de Bezout, à l'usage de l'artillerie, édition originale, 4 vol. in-8. dont les parties se vendent séparément ; prix br. 20 fr.

Cours de mathématiques de Bossut, à l'usage du génie, 7 vol. in-8. dont les parties se vendent séparément ; prix br. 37 fr.

Cours de mathématiques de Bossut, à l'usage des écoles publiques, in-8. *rare* ; prix br. 6 fr.

Eléments de géométrie de Legendre, in-8. br. 6 fr.

Principes de calcul et de géométrie, ou Eléments de Mathématiques ; par Para du Phaujas, in-8. rel. 7 fr. 50 c.

Abrégé du Cours de mathématiques de Chrétien Wolf, 3 vol. in-8. rel. 18 fr.

Exposition d'une méthode pour construire les équations indéterminées qui se rapportent aux sections coniques ; par Prony, in-4. br. 3 fr.

Les Sections coniques de l'Hôpital, in-4. rel. 12 fr.

Des infiniment Petits ; par l'Hôpital, in-4. rel. 12 fr.

Eléments d'algebre de Maclaurin, in-4. rel. 12 fr.

Méthode de fluxions de Maclaurin, 2 vol. in-4. rel. 24 fr.

Tables portatives de Logarithmes, contenant les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 108000 ; les logarithmes des sinus et tangentes, de seconde en seconde pour les cinq premiers degrés, de dix en dix secondes pour tous les degrés du quart de cercle, et suivant la nouvelle division centésimale, de dix millième en dix-millième ; précédées d'un discours préliminaire sur l'explication, l'usage et la sommation des logarithmes, et sur leur application à l'astronomie, à la navigation, à la géométrie-pratique, et aux calculs d'intérêts ; suivies de nouvelles tables plus approchées, et de plusieurs autres utiles à la recherche des longitudes en mer, etc. ; par Callet. Edition stéréotype, gravée, fondue et imprimée par Firmin Didot, 1 vol. in-8. grand papier, rel. 14 fr.

Id. in-4. papier fin. 30 fr.

Tables des logarithmes ; par J. Lalande, *sous presse ;* elles seront stéréotypes.

Abrégé d'astronomie ; par Lalande, in-8. br. 5 fr.

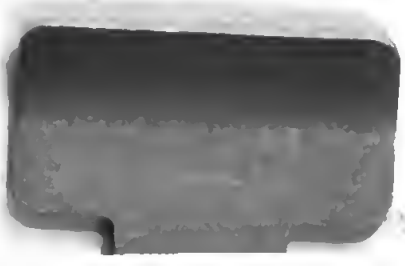
Théorie purement algébrique des quantités imaginaires et des fonctions qui en résultent ; par Suremain Misseri, an 9, 1 vol. in-8. br. 5 fr.

Architecture hydraulique de Belidor, 4 vol. in-4. rel. 100 fr.

Nouvelle architecture hydraulique de Prony, in-4. tom. 1 et 2 ; prix br. 60 fr.

Description des projets et de la construction des ponts, etc. ; par Perronet, in-4. g. pap. avec un volume de planches, forme d'Atlas, prix 90 l.

Concordance perpétuelle de l'annuaire républicain avec l'ancien calendrier, et de l'ancien calendrier avec l'annuaire républicain ; par A. C. Lefebvre, directeur des postes, in-8. 5 fr.

00566453

B. BIB
Lemaire